ПОЛИМОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА ДОКАЗУЕМОСТИ

Г.К.Джапаридзе
(Тбилиси)

Введение

Работа посвящена исследованию полимодальных пропозициональных систем, аксиоматизирующих доказуемость в достаточно богатых теориях и их определенным способом построенных расширениях.

Считаем, что рассматриваемые нами теории, как и арифметика(PA), формализованы в классическом исчислении предикатов с равенством первого порядка, записаны на языке PA, содержат все аксиомы этой системы и рекурсивно перечислимы (хотя, условие перечислимости не является существенным: все основные результаты настоящей работы в самом деле справедливы для гораздо более обширного класса теорий). Для каждой такой теории T определяем бесконечную последовательность T_0, T_1, ... расширений T следующим образом: $T_0 = T$; T_{n+1} получается добавлением к T_n в качестве дополнительных аксиом всех формул вида $\forall x P(x)$, где $T_n \vdash P(\bar{0})$, $T_n \vdash P(\bar{1})$, ... Формулу, арифметизирующую при этом доказуемость в T_n, обозначаем через $Bew^n_T(\cdot)$. При условии рекурсивной перечислимости T для каждого n $Bew^n_T(\cdot)$ имеет сложность Σ_{2n+1}.

Формулы языка полимодальной пропозициональной логики, содержащего бесконечное множество операторов необходимости – $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, ..., рассматриваются как схемы арифметических предложений, включающие формулы доказуемости $Bew^0_T(\cdot)$, $Bew^1_T(\cdot)$, ..., с помощью которых соответственно интерпретируются модальности $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, ... Для точного определения такого подхода вводятся понятия реализации и перевода. Реализацией называется любая функция φ, ставящая в соответствие каждой пропозициональной букве p некоторое арифметическое предложение $\varphi(p)$. T-перевод полимодальной формулы A при реализации φ – символически A^φ_T – определяется индуктивно: для любой пропозициональной буквы p $p^\varphi_T = \varphi(p)$; перевод коммутирует с булевыми связками; для любого n $(\boxed{n}B)^\varphi_T = Bew^n_T(\ulcorner B^\varphi_T \urcorner)$, где $\ulcorner B^\varphi_T \urcorner$ – гёделев номер предложения B^φ_T.

Определим $L_T(S)$ (где S, как и T, теория в арифметическом языке) как множество полимодальных формул, T-переводы которых вы-

водимы в S при любой реализации. Формулы, которые не содержат модальных операторов, отличных от $\boxed{0}$, называем мономодальными. Определим $L^0_T(S)$ как подмножество всех мономодальных формул множества $L_T(S)$. Если в качестве S берется множество Tr_ω всех истинных арифметических формул, то будем писать просто L_T или L^0_T.

В [II] было установлено, что при условии $T \subseteq Tr_\omega$ $L^0_T(T)$ задается известной разрешимой системой GL, впервые введенной в [9] под названием $K4.W$, а L^0_T – разрешимой системой Соловея S, введенной в [II]. Подразумеваем, что единственный модальный оператор $\Box$, имеющийся в языке этих систем, понимается как $\boxed{0}$.

В настоящей работе предложены разрешимые системы GP и GP^*, являющиеся полимодальными аналогами систем GL и S в том смысле, что при условии истинности всех теорем T $L_T(T) = L_T(PA) = GP$ и $L_T = GP^*$. Логика GP обнаруживает и другое интересное свойство: $GP \supseteq \bigcap_{T \in \theta} L_T$, где θ – множество всех конечных расширений арифметики (т.е. расширений PA с помощью конечного числа дополнительных аксиом); с другой стороны, для всех рассматриваемых нами теорий (в том числе, для всех конечных расширений PA) T $GP \subseteq L_T$. Этот результат имеет мономодальный аналог, состоящий в следующем: $GL \supseteq \bigcap_{T \in \theta} L^0_T$, где θ – множество всех конечных расширений PA или даже множество всех конечных ω-противоречивых расширений PA; с другой стороны, для всех рассматриваемых нами теорий T $GL \subseteq L^0_T$. В работе предложена также мономодальная система GI со следующими свойствами: $GI \supseteq \bigcap_{T \in \theta} L^0_T$, где θ – множество всех ω-непротиворечивых конечных расширений арифметики; с другой стороны, для всех рассматриваемых нами ω-непротиворечивых теорий T $GI \subseteq L^0_T$; при условии ω-непротиворечивости T имеет место $GI = L^0_T(T + \omega\text{-}con(T))$, где $\omega\text{-}con(T)$ – формула, арифметизирующая ω-непротиворечивость T, а $T + \omega\text{-}con(T)$ – расширение T с помощью $\omega\text{-}con(T)$ в качестве дополнительной аксиомы.

Своеобразным толчком к данному исследованию явилась работа [4]; введенный и изученный Г.Булосом предикат ω-доказуемости эквивалентен нашему предикату $T_1 \vdash$. Ввиду этого практически все утверждения § I, а также теоремы 2.8 и 2.9 следует рассматривать как обобщения результатов из [4]. Некоторые другие наши результаты также частично пересекаются с результатами из [4, 5].

Основные результаты § I, 2 и 3 настоящей работы объявлены в [2], а работы в целом – в [7].

§ I. Последовательные ω-расширения теорий типа арифметики

I.I. Пусть S – аксиоматически заданная теория в языке формальной арифметики Пеано (PA). Назовем ω-р а с ш и р е н и е м теории S – символически $\omega(S)$ – систему, получающуюся добавлением к S в качестве дополнительных аксиом всех формул вида $\forall x P(x)$, где для любого натурального k $S \vdash P(\bar{k})$ ($\bar{k}$-терм $0^{\prime\ldots\prime}_{k}$, $P(\bar{k})$ – результат подстановки $\bar{k}$ на места всех свободных вхождений x в $P(x)$).

Ниже везде буквой T будем обозначать некоторую теорию в языке арифметики, формализованную, как и PA, в классическом исчислении предикатов с равенством первого порядка; при этом предполагаем, что T имеет примитивно-рекурсивное множество аксиом, среди которых содержатся все аксиомы PA. Других требований (как, скажем, непротиворечивость) к теории T мы предварительно не предъявляем. Под теорией (системой), вообще говоря, понимаем конкретное множество аксиом и правил вывода, но иногда теорию мы будем отождествлять с множеством ее теорем. В некоторых контекстах мы также отождествляем арифметическую формулу, в которой имеются свободные переменные, с соответствующим предикатом. Для любого выражения E его гёделев номер, а также соответствующий терм, обозначаем через $\ulcorner E \urcorner$. Через Tr_ω обозначаем множество всех истинных (в стандартной модели) арифметических формул. Истинность незамкнутой формулы понимаем как истинность ее универсального замыкания. Замкнутые формулы называем п р е д л о ж е н и я м и.

I.2. Определим бесконечную последовательность T_0, T_1, ... расширений теории T следующим образом: $T_0 = T$; для любого n $T_{n+1} = \omega(T_n)$.

I.3. Заметим, что если $T \subseteq Tr_\omega$, то для любого n также имеет место $T_n \subseteq Tr_\omega$.

I.4. <u>Утверждение.</u> Метапредикаты "... есть аксиома T_n" и "... есть доказательство в T_n ..." соответственно арифметизируемы с помощью некоторых Π_{2n}-формул $Ax^n_T(x)$ и $Pf^n_T(x, y)$.

По определению формула F является Π_k-(соответственно Σ_k-) формулой в строгом смысле, если для некоторой примитивно-рекурсивной формулы P $F = \theta_1 x_1 \ldots \theta_k x_k P$, где θ означает квантор, соседние кванторы различны и $\theta_1 = \forall$ (соответственно $\exists$); формула E является Π_k-(Σ_k-) формулой (в нестрогом смысле), если $PA \vdash E \leftrightarrow F$ для некоторой в строгом смысле Π_k-(Σ_k-) формулы F.

Мы знаем, как можно, следуя Гёделю, построить Π_0-формулы $Ax^0_T(x)$ и $Pf^0_T(x, y)$, соответственно арифметизирующие предикаты "... есть аксиома T_0" и "... есть доказательство в T_0 ...". В качестве индуктивного предположения возьмем, что для данного n уже построены Π_{2n}-формулы $Ax^n_T(x)$ и $Pf^n_T(x, y)$, арифметизирующие соответствующие метапредикаты. Пусть $H(x, y)$ – терм для следующей примитивно-рекурсивной функции h: для любых натуральных k и l (соответственно вместо x и y), если $k = \ulcorner \forall x P(x) \urcorner$ для некоторой формулы $P(x)$, то $h(k, l) = \ulcorner P(\bar{l}) \urcorner$; в противном случае $h(k, l) = 0$.
Пусть $$Ax^{n+1}_T(x) = Ax^n_T(x) \vee \forall z \exists y Pf^n_T(y, H(x, z)).$$
Если учесть, что в нумерации 0 не является номером ни одной формулы, ясно, что $Ax^{n+1}_T(x)$ арифметизирует метапредикат "... есть аксиома T_{n+1}". Вместе с тем $Ax^{n+1}_T(x)$, как дизъюнкция Π_{2n}- и $\Pi_{2(n+1)}$-формул, является $\Pi_{2(n+1)}$-формулой. После этого видно, как можно построить предикат $Pf^{n+1}_T(x, y)$, который примитивно-рекурсивен относительно $Ax^{n+1}_T(x)$ и, поэтому, тоже является $\Pi_{2(n+1)}$-формулой.

Пусть $Bew^n_T(x) = \exists y Pf^n_T(y, x)$. $Bew^n_T(x)$ является Σ_{2n+1}-формулой и арифметизирует метапредикат "... доказуемо в T_n".

Если $x_1, \ldots, x_n$ – все свободные переменные формулы $E(x_1, \ldots, x_n)$, то через $[E]$ будем обозначать терм с теми же свободными переменными для примитивно-рекурсивной функции, имеющей в качестве значения для любой n-ки аргументов $k_1, \ldots, k_n$ (которые соответствуют $x_1, \ldots, x_n$) $\ulcorner E(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n) \urcorner$. В частности, если E – предложение, то $[E]$ есть константный терм $\ulcorner E \urcorner$.

I.5. <u>Утверждение.</u> Для любой Σ_{2n+1}-формулы E $PA \vdash E \rightarrow Bew^n_T([E])$.

В доказательстве используем следующие три леммы, которые справедливы для любой формулы F при любом k:

а) $PA \vdash Bew^0_{PA}([F]) \rightarrow Bew^0_T([F])$;

б) $PA \vdash \forall x Bew^k_T([F]) \rightarrow Bew^{k+1}_T([\forall x F])$;

в) $PA \vdash \exists x Bew^k_T([F]) \rightarrow Bew^k_T([\exists x F])$.

Метаутверждения, которые арифметизируют формулы, следующие за "$PA \vdash$" в этих леммах, доказываются самым элементарным образом и эти доказательства, естественно, формализуемы в PA.

Нетрудно также убедиться, что $PA \vdash E \leftrightarrow F$ влечет $PA \vdash Bew^n_T([E]) \leftrightarrow Bew^n_T([F])$, поэтому достаточно доказать I.5 для случая, когда E – Σ_{2n+1} – формула в строгом смысле.

Докажем I.5 индукцией по n. Справедливость базисного утверждения (для $n = 0$) следует из (а) и общеизвестного факта о т.н. "доказуемой Σ_1-полноте PA" (см. [6], с.44), согласно которому если

E — Σ_1 -формула, то $PA \vdash E \to Bew^0_{PA}([E])$. Индуктивное предположение: для любой Σ_{2n+1} -формулы E $PA \vdash E \to Bew^n_T([E])$. Докажем, что тогда для любой Σ_{2n+3} -формулы E $PA \vdash E \to Bew^{n+1}_T([E])$. Если E является Σ_{2n+3} -формулой (в строгом смысле), то она имеет вид $\exists x \forall y P$, где P – Σ_{2n+1} -формула.

I. $PA \vdash P \to Bew^n_T([P])$ (индуктивное предположение).

2. $PA \vdash \forall y P \to \forall y Bew^n_T([P])$ (из (I) по исчислению предикатов).

3. $PA \vdash \forall y P \to Bew^{n+1}_T([\forall y P])$ (из (2) и (б)).

4. $PA \vdash \exists x \forall y P \to \exists x Bew^{n+1}_T([\forall y P])$ (из (3) по исчислению предикатов)

5. $PA \vdash \exists x \forall y P \to Bew^{n+1}_T([\exists x \forall y P])$ (из (4) и (в)), т.е. $PA \vdash E \to Bew^{n+1}_T([E])$ – что и требовалось доказать.

I.6. Из I.5 следует, что каждое истинное Σ_{2n+1} -предложение доказуемо в T_n. Следовательно, $Th_\omega \subseteq \bigcup_{n\in\omega} T_n$; если же $T \subseteq Th_\omega$, то, согласно I.3, имеет место и обратное включение и, тем самым, $\bigcup_{n\in\omega} T_n = Th_\omega$.

I.7. <u>Утверждение.</u> Теория T_n ω-противоречива тогда и только тогда, когда T_{n+1} (просто) противоречива.

По определению, теория S ω-противоречива тогда и только тогда, когда существует такая формула $P(x)$, что $S \vdash \exists x \neg P(x)$ и, вместе с тем, для любого k $S \vdash P(\bar{k})$.

Допустим, T_n ω-противоречива, т.е. для некоторой формулы $P(x)$ имеем I) $T_n \vdash \exists x \neg P(x)$ и 2) $\overset{\circ}{\forall} k \{T_n \vdash P(\bar{k})\}$. Из (I), поскольку $T_n \subseteq T_{n+1}$, следует, что $T_{n+1} \vdash \exists x \neg P(x)$, т.е. $T_{n+1} \vdash \neg \forall x P(x)$, а из (2), согласно определению I.I, следует, что $\omega(T_n) \vdash \forall x P(x)$, т.е. $T_{n+1} \vdash \forall x P(x)$. Следовательно, T_{n+1} противоречива.

Теперь допустим, что T_{n+1} противоречива, т.е. $T_{n+1} \vdash \bar{0} = \bar{1}$. Можно предположить, что $\forall x P(x)$ – единственная "собственная" аксиома теории $\omega(T_n) = T_{n+1}$ (т.е. аксиома $\omega(T_n)$, которая вместе с тем не является аксиомой T_n), участвующая в выводе формулы $\bar{0} = \bar{1}$ (ибо, если таких аксиом несколько, то можно их заменить конъюнкцией этих аксиом с возможным переименованием переменных и вынесением квантора вперед); можно также предположить, что $\forall x P(x)$ – замкнутая формула. Тогда, по теореме о дедукции, $T_n \vdash \forall x P(x) \to \bar{0} = \bar{1}$, т.е. I) $T_n \vdash \exists x \neg P(x)$. Вместе с тем, поскольку $\forall x P(x)$ – "собственная" аксиома $\omega(T_n)$, согласно определению I.I, имеем 2) $\overset{\circ}{\forall} k \{T_n \vdash P(\bar{k})\}$. (I) и (2) дают, что T_n ω-противоречива.

I.8. Так как I.7 доказывается элементарно, $Bew^{n+1}_T(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner)$ можем считать формулой, арифметизирующей ω-противоречивость T_n.

§ 2. Полимодальные системы GP и GP^*

Полимодальный язык предлагаемых систем GP и GP^* в качестве элементарных формул содержит пропозициональные буквы и $\perp$ ("ложь"), из которых стандартным образом строятся сложные формулы с помощью $\to$ (импликации) и операторов "необходимости", которых в языке бесконечное число: $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, ... Другие булевы связки, операторы "возможности", а также $\top$ ("истина"), можно вводить по обычным определениям. В частности, $\neg A = A \to \perp$; $\langle n \rangle A = \neg \boxed{n} \neg A$; $\top = \neg \perp$ и т.д. Формулы этого языка называем п о л и м о д а л ь н ы м и ф о р м у л а м и.

2.I. С и с т е м а GP.

Аксиомы GP:

– тавтологии;

– формулы, задающиеся схемами (для всех n):

I. $\boxed{n}(A \to B) \to (\boxed{n}A \to \boxed{n}B)$

II. $\boxed{n}(\boxed{n}A \to A) \to \boxed{n}A$

III. $\boxed{n}A \to \boxed{n+1}A$

IУ. $\langle n \rangle A \to \boxed{n+1}\langle n \rangle A$

Правила вывода GP: $A, A \to B \vdash B$ (модус поненс) и $A \vdash \boxed{0}A$ (усиление относительно $\boxed{0}$).

2.2. С и с т е м а GP^*.

Аксиомы GP^*: – теоремы GP.

Правила вывода GP^*: $\boxed{n}A \vdash A$ (для всех n).

Пусть для некоторого множества индексов J $\{\boxed{i} : i \in J\}$ – множество всех операторов необходимости, имеющихся в языке данной модальной пропозициональной системы L. Тогда система L называется нормальной (по Сегербергу [I0]), если в ней доказуемы все тавтологии, все формулы вида $\boxed{i}(A \to B) \to (\boxed{i}A \to \boxed{i}B)$ (для каждого $i \in J$), и если множество теорем L замкнуто относительно правил модус поненс, подстановки вместо пропозициональных букв и $A \vdash \boxed{i}A$ (для каждого $i \in J$).

Ясно, что, поскольку нормальные системы содержат тавтологии и модус поненс, множество теорем любой нормальной системы L замкнуто относительно истинностно-функционального следования, т.е., если $L \vdash A_1, \ldots, L \vdash A_k$ и из $A_1, \ldots, A_k$ выводится B по исчислению высказываний (ИВ), то $L \vdash B$. Нормальные системы также обладают рядом других синтаксических свойств (см. [6], гл.I), которые мы специально не выделим, но которыми будем пользоваться в дальнейшем, ссылаясь просто на нормальность исследуемой системы.

2.3. GP является нормальной системой.

Без доказательства констатируем также следующие четыре факта относительно GP, из которых неочевидным является только 2.7.

2.4. Если $k \leq n$, то $GP \vdash \boxed{k}A \to \boxed{n}A$, т.е. $GP \vdash \langle n\rangle A \to \langle k\rangle A$.

2.5. Если $k < n$, то $GP \vdash \langle k\rangle A \to \boxed{n}\langle k\rangle A$, т.е. $GP \vdash \langle n\rangle \boxed{k}A \to \boxed{k}A$.

2.6. $GP \vdash \langle n\rangle A \to \langle n\rangle (A \& \boxed{n}\neg A)$ (2.I(II), контрапозиция).

2.7. Если $k \leq n$, то $\boxed{k}A \to \boxed{n}\boxed{k}A$.

Р е а л и з а ц и е й называем любую функцию φ, сопоставляющую каждой пропозициональной букве p некоторое арифметическое предложение $\varphi(p)$.

T-п е р е в о д полимодальной формулы A при реализации φ — символически A^{φ}_{T} — определяем индукцией по построению A (p — любая пропозициональная буква, B и C — любые полимодальные формулы, n — любое натуральное число):

$$p^{\varphi}_{T} = \varphi(p); \quad \perp^{\varphi}_{T} = (\bar{0} = \bar{1}); \quad (B \to C)^{\varphi}_{T} = B^{\varphi}_{T} \to C^{\varphi}_{T}; \quad (\boxed{n}B)^{\varphi}_{T} = Bew^{n}_{T}(\ulcorner B^{\varphi}_{T} \urcorner).$$

Так как B^{φ}_{T} — предложение, вместо $Bew^{n}_{T}(\ulcorner B^{\varphi}_{T} \urcorner)$ можно писать $Bew^{n}_{T}([B^{\varphi}_{T}])$ или $Bew^{n}_{T}[B^{\varphi}_{T}]$ (способ записи заимствован из [6]).

Для любой теории S, записанной, как и T, на языке PA, определим $L_{T}(S)$ как множество таких полимодальных формул A, что для любой реализации φ $S \vdash A^{\varphi}_{T}$. Вместо $L_{T}(Tr_{\omega})$ будем писать просто L_{T}. Ясно, что включение $S \subseteq S'$ влечет включение $L_{T}(S) \subseteq L_{T}(S')$.

2.8. <u>Теорема.</u> $GP \subseteq L_{T}(PA)$; тем самым, $GP \subseteq L_{T}(T)$ и $GP \subseteq L_{T}$.

<u>Доказательство</u>. Сперва убедимся, что для любой формулы A и любой реализации φ, если A — аксиома GP, то $PA \vdash A^{\varphi}_{T}$.

С л у ч а й I, когда A — тавтология, тривиален, ибо перевод сохраняет структуру формул на уровне ИВ.

С л у ч а й 2. A задается схемой 2.I(I). Тогда A^{φ}_{T} имеет вид $Bew^{n}_{T}[E \to F] \to (Bew^{n}_{T}[E] \to Bew^{n}_{T}[F])$. Доказательство этого предложения в PA есть формализация того простого аргумента, что если $T_n \vdash E \to F$ и $T_n \vdash E$, то, по правилу модус поненс, $T_n \vdash F$.

С л у ч а й 3. A задается схемой 2.I(II). Тогда A^{φ}_{T} имеет вид $Bew^{n}_{T}[Bew^{n}_{T}[E] \to E] \to Bew^{n}_{T}[E]$. Это предложение арифметизирует следующую ниже лемму:

2.8.I. <u>Лемма</u>. Если $T_n \vdash Bew^{n}_{T}[E] \to E$, то $T_n \vdash E$.

Для доказательства леммы сперва заметим, что:

2.8.I.I. Для любого предложения S, если $T_n \vdash S$, то $T_n \vdash Bew^{n}_{T}[S]$. Более того, для каждого S и n этот факт доказуем в PA. В самом деле, поскольку $Bew^{n}_{T}[S]$ является Σ_{2n+1}-формулой, согласно I.5, $PA \vdash Bew^{n}_{T}[S] \to Bew^{n}_{T}[Bew^{n}_{T}[S]]$.

Зафиксируем F как такое предложение, что $PA \vdash F \leftrightarrow Bew^{n}_{T}[F \to E]$. Согласно диагональной лемме (см. [6], с.49), такое F существует.

2.8.I.2. Если $T_n \vdash F \to E$, то $T_n \vdash E$.

В самом деле, если $T_n \vdash F \to E$, то, согласно 2.8.I.I, $T_n \vdash Bew^{n}_{T}[F \to E]$. А так как $PA \vdash F \leftrightarrow Bew^{n}_{T}[F \to E]$, имеем $T_n \vdash F$, что вместе с $T_n \vdash F \to E$ дает $T_n \vdash E$.

Доказательство предложения 2.8.I.2 можно формализовать в PA, что дает $PA \vdash Bew^{n}_{T}[F \to E] \to Bew^{n}_{T}[E]$. Следовательно, $PA \vdash F \to Bew^{n}_{T}[E]$ и, тем самым,

2.8.I.3. $T_n \vdash F \to Bew^{n}_{T}[E]$.

Теперь допустим, что $T_n \vdash Bew^{n}_{T}[E] \to E$. Тогда, согласно 2.8.I.3, $T_n \vdash F \to E$, из чего 2.8.I.2 дает $T_n \vdash E$. Лемма 2.8.I доказана.

Очевидно, что элементарное доказательство 2.8.I формализуемо в PA, из чего следует, что $PA \vdash Bew^{n}_{T}[Bew^{n}_{T}[E] \to E] \to Bew^{n}_{T}[E]$.

С л у ч а й 4. A задается схемой 2.I(III). Доказуемость A^{φ}_{T} в PA следует из формализуемости того аргумента, что $T_n \subseteq T_{n+1}$.

С л у ч а й 5. A задается схемой 2.I(IV), т.е. A^{φ}_{T} имеет вид $\neg Bew^{n}_{T}[\neg E] \to Bew^{n+1}_{T}[\neg Bew^{n}_{T}[\neg E]]$. Но $\neg Bew^{n}_{T}[\neg E]$ является $\Sigma_{2(n+1)+1}$-формулой (в нестрогом смысле!) и, поэтому, согласно I.5, $PA \vdash A^{\varphi}_{T}$.

Нетрудно проверить, что если при любой реализации T-переводы посылок (посылки) одного из правил вывода GP доказуемы в PA, то таковы и T-переводы вывода из этих посылок (при проверке правила усиления используем 2.8.I.I). Из всего этого следует утверждение теоремы 2.8 о том, что $GP \subseteq L_{T}(PA)$.

2.9. <u>Теорема.</u> Если $T \subseteq Tr_{\omega}$, то $GP^{*} \subseteq L_{T}$.

<u>Доказательство</u>. Индукцией по длине вывода A покажем, что если $GP^{*} \vdash A$, то $A \in L_{T}$. Если A — аксиома GP^{*} т.е. теорема GP, то, согласно 2.8, $A \in L_{T}$. Теперь, допустим, A выводится из $\boxed{n}A$ по правилу $\boxed{n}A \vdash A$ и известно, что $\boxed{n}A \in L_{T}$, т.е. $\dot{\forall}\varphi\{(\boxed{n}A)^{\varphi}_{T}$ истинно$\}$, т.е. $\dot{\forall}\varphi\{Bew^{n}_{T}[A^{\varphi}_{T}]$ истинно$\}$, т.е. $\dot{\forall}\varphi\{T_n \vdash A^{\varphi}_{T}\}$. Тогда, согласно I.3, если $T \subseteq Tr_{\omega}$, то $\dot{\forall}\varphi\{A^{\varphi}_{T}$ истинно$\}$, т.е. $A \in L_{T}$.

§ 3. Семантика Крипке для системы GP

Пусть J — некоторое множество индексов и $\{\boxed{i} : i \in J\}$ — множество всех операторов необходимости, имеющихся в языке данной модальной пропозициональной системы L. Структурой Крипке называется множество $S = \langle W, R^{i} : i \in J \rangle$, где W — непустое множество (область) "возможных миров", а для каждого $i \in J$ R^{i} — бинарное отношение на W ("отношение достижимости", соответствующее оператору $\boxed{i}$). Моделью Крипке называется множество $M = \langle W, R^{i} : i \in J, P \rangle$, где $\langle W, R^{i} : i \in J \rangle$ — структура Крипке, а P — оценивающая функция, сопоставляющая каждой паре (w, p) – где $w \in W$ и p – пропозициональная буква – значение $\top$ или $\bot$.

Истинность модальной формулы A в модели $\mathcal{M} = \langle W, R^i : i \in \mathcal{I}, P\rangle$ относительно мира $w \in W$ – символически $\mathcal{M} \models_w A$ – определяется индуктивно (p – любая пропозициональная буква, B и C – любые формулы): $\mathcal{M} \not\models_w \bot$; $\mathcal{M} \models_w p \Leftrightarrow P(w, p) = \top$; $\mathcal{M} \models_w (B \to C) \Leftrightarrow \{\mathcal{M} \not\models_w B$ или $\mathcal{M} \models_w C\}$; $\mathcal{M} \models_w [i]B \Leftrightarrow \{$ для любого $u \in W$, если $wR^i u$, то $\mathcal{M} \models_u B\}$ (для всех $i \in \mathcal{I}$).

Скажем, что формула A истинна в модели $\mathcal{M} = \langle W, R^i : i \in \mathcal{I}, P\rangle$, если для любого $w \in W$ $\mathcal{M} \models_w A$. Скажем, что формула A истинна в структуре $\langle W, R^i : i \in \mathcal{I}\rangle$, если для любой оценивающей функции P, A истинна в модели $\langle W, R^i : i \in \mathcal{I}, P\rangle$.

Множество K модальных формул называется L -непротиворечивым, если не существует такого конечного подмножества $\{A_1, \ldots, A_n\} \in K$, что $L \vdash \neg(A_1 \& \ldots \& A_n)$. Множество K модальных формул называется максимальным, если для любой формулы A $A \in K$ или $\neg A \in K$.

Если L непротиворечива, то каноническая модель системы L, которую обычно обозначаем через $\mathcal{M}_L = \langle W_L, R^i_L : i \in \mathcal{I}, P_L\rangle$, определяется следующим образом: W_L – это множество всех L -непротиворечивых максимальных множеств формул; для любых $i \in \mathcal{I}$ и $w, u \in W_L$ $wR^i_L u$ если и только если для любой формулы A $[i]A \in w \Rightarrow A \in u$; для любой пропозициональной буквы p и любого $w \in W_L$ $P_L(w, p) = \top \Leftrightarrow p \in w$. Известно, что каноническая модель любой непротиворечивой нормальной системы L (а значит, и системы GP) обладает следующими двумя важными свойствами: для любой формулы A и любого $w \in W_L$ $\mathcal{M}_L \models_w A \Leftrightarrow A \in w$; для любой формулы A $L \vdash A \Leftrightarrow \{A$ истинна в $\mathcal{M}_L\}$ (см. [6, 9, 10]).

В случае языка системы GP $\mathcal{I} = \omega$ и структуры Крипке имеют вид $\langle W, R^0, R^1, \ldots\rangle$.

3.1. <u>Теорема.</u> Не существует такого класса K структур Крипке, что для любой полимодальной формулы A $GP \vdash A \Leftrightarrow \{A$ истинна во всех структурах из $K\}$.

<u>Доказательство.</u> Допустим противное: существует класс K, о котором говорится в теореме. Тогда в некоторой структуре из K формула $[1]\bot$ не истинна. В самом деле, в противном случае, по допущению, имело бы место $GP \vdash [1]\bot$ и, тем самым, $GP^* \vdash \bot$. Но это, в силу 2.9, невозможно.

Пусть $S = \langle W, R^0, R^1, \ldots\rangle$ – структура из K, в которой $[1]\bot$ не истинна. Это возможно только в случае, когда для некоторых w и u из W имеет место $wR^1 u$. Зафиксируем эти миры w и u. Пусть P – такая оценивающая функция, что для некоторой фиксированной пропозициональной буквы p $P(u, p) = \bot$ и для всех $v \neq u$ из W $P(v, p) = \top$. Пусть $\mathcal{M} =$

$= \langle W, R^0, R^1, \ldots, P\rangle$. Тогда $\mathcal{M} \models_w \langle 1\rangle\neg p$. Согласно нашему допущению относительно K, поскольку $S \in K$, все теоремы GP должны быть истинны в S и, тем самым, в $\mathcal{M}$. Поэтому, так как $GP \vdash \langle 1\rangle\neg p \to \langle 0\rangle\neg p$ (2.4), $\mathcal{M} \models_w \langle 0\rangle\neg p$ и, поскольку $GP \vdash \langle 0\rangle\neg p \to [1]\langle 0\rangle\neg p$ (схема 2.1(IV)), $\mathcal{M} \models_w [1]\langle 0\rangle\neg p$. Следовательно, $\mathcal{M} \models_u \langle 0\rangle\neg p$, т.е. $\mathcal{M} \not\models_u [0]p$ (*)(отсюда и из того факта, что для всех $v \neq u$ из W $P(v, p) = \top$, следует, что $uR^0 u$).

Из (*) следует, что $\mathcal{M} \models_u [0]p \to p$. Так как для всех $v \neq u$ из W $\mathcal{M} \models_v p$, получаем, что $[0]p \to p$ истинна в $\mathcal{M}$ относительно всех возможных миров, – в том числе, относительно всех миров, достижимых из u по R^0. Следовательно, $\mathcal{M} \models_u [0]([0]p \to p)$, из чего схема 2.1(II) дает $\mathcal{M} \models_u [0]p$, что противоречит (*). Итак, из допущения неверности теоремы мы вывели противоречие.

3.2. <u>Теорема</u>. Не существует такого класса K моделей Крипке с конечными областями, что для любой полимодальной формулы A $GP \vdash A \Leftrightarrow \{A$ истинна во всех моделях из $K\}$.

<u>Доказательство.</u> Допустим противное: существует класс K, о котором говорится в теореме. Тогда в силу того же аргумента, который был использован в доказательстве теоремы 3.1, существует такая модель $\mathcal{M} = \langle W, R^0, R^1, \ldots, P\rangle \in K$, что для некоторых w и u из W имеем $wR^1 u$. Зафиксируем эти объекты.

Определим $\langle 0\rangle^k A$ следующим образом: $\langle 0\rangle^0 A = A$; $\langle 0\rangle^{k+1} A = \langle 0\rangle(\langle 0\rangle^k A)$.

<u>Лемма</u>. Для любого k $\mathcal{M} \models_w \langle 0\rangle^{k+1}\top$.

Доказываем индукцией по k. Поскольку $wR^1 u$, $\mathcal{M} \models_w \langle 1\rangle\top$. Но так как $GP \vdash \langle 1\rangle\top \to \langle 0\rangle\top$ (2.4), имеем $\mathcal{M} \models_w \langle 0\rangle\top$, т.е. $\mathcal{M} \models_w \langle 0\rangle^{0+1}\top$ (базис). В качестве индуктивного предположения возьмем, что $\mathcal{M} \models_w \langle 0\rangle^{k+1}\top$. Поскольку $GP \vdash \langle 0\rangle^{k+1}\top \to [1]\langle 0\rangle^{k+1}\top$ (2.1 (IV)), имеем $\mathcal{M} \models_w [1]\langle 0\rangle^{k+1}\top$. Следовательно, $\mathcal{M} \models_w \langle 0\rangle^{k+1}\top$, отсюда $\mathcal{M} \models_w \langle 1\rangle\langle 0\rangle^{k+1}\top$. Так как $GP \vdash \langle 1\rangle\langle 0\rangle^{k+1}\top \to \langle 0\rangle\langle 0\rangle^{k+1}\top$ (2.4), получаем $\mathcal{M} \models_w \langle 0\rangle\langle 0\rangle^{k+1}\top$, т.е. $\mathcal{M} \models_w \langle 0\rangle^{(k+1)+1}\top$. Лемма доказана.

По 2.6, для любого k $GP \vdash \langle 0\rangle^{k+1}\top \to \langle 0\rangle(\langle 0\rangle^k\top \& \neg\langle 0\rangle^{k+1}\top)$. Из этого факта и леммы следует, что для любого k $\mathcal{M} \models_w \langle 0\rangle(\langle 0\rangle^k\top \& \neg\langle 0\rangle^{k+1}\top)$, т.е. для любого k существует такой $v_k \in W$, что $\mathcal{M} \models_{v_k} \langle 0\rangle^k\top \& \neg\langle 0\rangle^{k+1}\top$. Нетрудно заметить, что если $k \neq \ell$, то $v_k \neq v_\ell$, из чего следует, что W – бесконечное множество, что противоречит условиям теоремы. Теорема 3.2 доказана.

Заметим, что в доказательствах теорем 3.1 и 3.2 фигурируют только модальности $[0]$ и $[1]$. Следовательно, за отрицательные результаты 3.1 и 3.2 ответственно вовсе не именно то обстоятельство, что язык GP содержит бесконечное множество модальных операторов: ситуация не изменилась бы, если бы мы ограничили этот язык только двумя модальностями $[0]$ и $[1]$.

§ 4 Полнота GP и GP^* в смысле Соловея

В этом параграфе мы собираемся доказать, что если $T \subseteq Th_\omega$, то для любой полимодальной формулы H условие $H \in L_T(T)$ влечет $GP \vdash H$ и условие $H \in L_T$ влечет $GP^* \vdash H$. Случай, когда H не содержит модальных операторов, т.е. когда H – формула в "чистом" языке ИВ, тривиален, ибо тогда $H \in L_T(T) \Leftrightarrow H \in L_T \Leftrightarrow \{H$ – тавтология$\} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow GP \vdash H \Leftrightarrow GP^* \vdash H$. Поэтому предположим, что множество всех модальных операторов, содержащихся в H, не пусто. Тогда максимальный из внутренних индексов этих операторов (внутренний индекс оператора $\boxed{n}$ – это n) называем м а к с и м а л ь н ы м м о д а л ь н ы м и н д е к с о м формулы H (МФИ(H)).

4.I. Пусть $\alpha =$ МФИ(H). Пару моделей Крипке $\{M_1 = \langle W, R_1^0, R_1^1, \ldots, P\rangle, M_2 = \langle W, R_2^0, R_2^1, \ldots, P\rangle\}$ называем к о н т р п а р о й для H, если выполняются следующие условия:

4.I.I. W конечно.

4.I.2. Для любой подформулы A формулы H и любого $u \in W$ $M_1 \models_u A \Leftrightarrow M_2 \models_u A$.

4.I.3. Для любого $n \leq \alpha$ отношение R_1^n иррефлексивно.

4.I.4. Для любых $m, n \leq \alpha$ и $u, t \in W$, если $m \neq n$, то неверно, что одновременно $uR_1^m t$ и $uR_1^n t$.

4.I.5. Для любых $n_1, \ldots, n_i \leq \alpha$ и $u_1, \ldots, u_{i+1} \in W$, если $n = min(n_1, \ldots, n_i)$, то $u_1 R_1^{n_1} u_2 R_1^{n_2} u_3 R_1^{n_3} \ldots R_1^{n_i} u_{i+1} \Rightarrow u_1 R_1^n u_{i+1}$.

4.I.6. Для любых $m, n \leq \alpha$, где $m \geq n$, и любых $u, t \in W$, $uR_2^m t \Rightarrow uR_2^n t$.

4.I.7. Для любых $m, n \leq \alpha$, где $m > n$, и любых $u, t, k \in W$, $\{kR_2^m u$ и $kR_2^n t\} \Rightarrow uR_2^n t$.

4.I.8. Для любого $n \leq \alpha$ и любых $u, t \in W$ $uR_1^n t \Rightarrow uR_2^n t$.

4.I.9. Существует такой $w \in W$, что:

а) $M_1 \not\models_w H$ и

б) для любого $n \leq \alpha$ $wR_2^n w$.

4.2. Лемма. Если $T \subseteq Th_\omega$ и существует контрпара для H, то неверно, что $H \in L_T$.

Доказательство. Допустим, $T \subseteq Th_\omega$ и существует контрпара для H. Зафиксируем эту контрпару $\{M_1 = \langle W, R_1^0, R_1^1, \ldots, P\rangle, M_2 = \langle W, R_2^0, R_2^1, \ldots, P\rangle\}$ и тот мир $w \in W$, для которого выполняется 4.I.9. Зафиксируем также α как максимальный модальный индекс формулы H.

Сопоставим элементам W отличные от 0 натуральные числа в качестве гёделевых номеров. Пусть $lh(x)$ будет термом для примитивно-рекурсивной функции, которая в качестве значения для любого натурального k, если k номер конечной последовательности каких-нибудь элементов W, имеет число членов ("длину") этой последовательности, и 0 – в противном случае. Пусть $N(x,y)$ будет термом для примитивно-рекурсивной функции, имеющей в качестве значения для любых натуральных k и ℓ (соответственно вместо x и y), если $\ell \neq 0$ и k является номером последовательности длиной $\geq \ell$, гёделев номер ℓ-го члена последовательности с номером k, и 0 – в противном случае.

Используя обобщенную диагональную лемму (см. [6], с.49), для каждого $v \in W$ можем построить такое арифметическое предложение S_v, что

$$PA \vdash S_v \leftrightarrow \exists x \underset{1}{(} N(x,1) = \ulcorner w \urcorner \mathbin{\&} N(x, lh(x)) = \ulcorner v \urcorner \mathbin{\&} \forall 0 < y \leq lh(x)$$

$$\underset{2}{(} \bigwedge_{u:\, u \in W} \underset{3}{(} N(x,y) = \ulcorner u \urcorner \to \underset{4}{(}\underset{5}{(}\underset{6}{(} \bigwedge_{n:\, n \leq \alpha} \underset{7}{(} \bigwedge_{t:\, uR_1^n t} \underset{8}{(} \neg Bew_T^n [\neg S_t] \underset{8}{)}\underset{7}{)}\underset{6}{)} \to$$

$$y = lh(x) \underset{5}{)} \mathbin{\&} \underset{5}{(} \bigwedge_{n:\, n \leq \alpha} \underset{6}{(} \bigwedge_{t:\, uR_1^n t} \underset{7}{(}\underset{8}{(} \exists z \underset{9}{(} Prf_T^n (z, [\neg S_t]) \mathbin{\&} \forall p < z \underset{10}{(} \bigwedge_{k:\, uR_1^n k}$$

$$\underset{11}{(} \neg Prf_T^n (p, [\neg S_k]) \underset{11}{)}\underset{10}{)}\underset{9}{)} \mathbin{\&} \underset{9}{(} \bigwedge_{m:\, m<n} \underset{10}{(} \bigwedge_{k:\, uR_1^m k} \underset{11}{(} \neg Bew_T^m [\neg S_k] \underset{11}{)}\underset{10}{)}\underset{9}{)}\underset{8}{)} \to$$

$$N(x, (y+1)) = \ulcorner t \urcorner \underset{7}{)}\underset{6}{)}\underset{5}{)}\underset{4}{)}\underset{3}{)}\underset{2}{)}\underset{1}{)}.$$

Здесь $\bigwedge$ обозначает конъюнкцию соответствующего множества формул. В дальнейшем мы используем также $\bigvee$ для обозначения дизъюнкции соответствующих формул. Пустую конъюнкцию можно отождествлять с $\bar{0} = \bar{0}$, пустую дизъюнкцию – с $\bar{0} = \bar{1}$.

П о я с н е н и я. Конечную последовательность элементов W назовем ц е п ь ю (а члены последовательности – з в е н ь я м и цепи), если и только если:

I) первый член последовательности – w;

2) если данный член последовательности представлен с помощью u, то:

а) если для всех $n \leq \alpha$ неверно, что $\dot{\exists} t \{uR_1^n t$ и $T_n \vdash \neg S_t\}$, то очередного члена не существует (u – последний член последовательности);

б) в противном случае очередным членом последовательности является такой $t \in W$, что для некоторого $n \leq \alpha$ $uR_1^n t$, $T_n \vdash \neg S_t$, $\neg S_t$ имеет самый малый гёделев номер T_n-доказательства из всех таких $\neg S_k$, что $uR_1^n k$ и, при этом, для всех $m < n$ неверно, что $\dot{\exists} k \{uR_1^m k$ и $T_m \vdash \neg S_k\}$.

Каждое предложение S_v утверждает, что существует цепь, последним звеном которой является v.

Определим бинарное отношение R на W: для любых $u, t \in W$ uRt

тогда и только тогда, когда для какого-нибудь $n\leqslant\alpha$ $uR_1^n t$. Из 4.I.3 следует иррефлексивность, а из 4.I.5 - транзитивность R. Согласно определению цепи, если данное звено представлено с помощью u, то очередное звено, если оно существует, представлено с помощью одного из элементов множества $\{t: uRt\}$. Отсюда, в силу иррефлексивности и транзитивности R, следует, что различные звенья представлены с помощью различных объектов. Поэтому в определенных контекстах мы можем, не рискуя вызвать недоразумения, отождествлять звено с тем элементом множества W, с помощью которого оно представлено. Из того, что все звенья различны, следует, что число звеньев цепи $\leqslant \overline{\overline{W}}$. Учитывая также то обстоятельство, что различные формулы не могут иметь один и тот же гёделев номер доказательства, с помощью элементарных рассуждений можем убедиться в справедливости следующих утверждений 4.2.I - 4.2.4:

4.2.I. Существует цепь и последним ее звеном является один из элементов W.

4.2.2. Цепь единственна.

4.2.3. Если u звено цепи, то последним звеном является u или такой $t\in W$, что uRt.

4.2.4. Если $uR_1^n t$ (где $n\leqslant\alpha$) и u является последним звеном цепи, то $T_n\not\vdash\neg S_t$.

Пусть $Z(\ulcorner u\urcorner)$ - арифметизация утверждения "u является звеном цепи". Ввиду формализуемости в PA элементарных доказательств 4.2.I - 4.2.4 имеем:

4.2.5. $PA\vdash \bigvee\limits_{u:\,u\in W} S_u$ (из 4.2.I).

4.2.6. Если $u\neq t$, то $PA\vdash\neg(S_u\,\&\,S_t)$ (из 4.2.2).

4.2.7. $PA\vdash Z(\ulcorner u\urcorner)\rightarrow S_u \vee \bigvee\limits_{t:\,uRt} S_t$ (из 4.2.3).

4.2.8. Если $uR_1^n t$ (где $n\leqslant\alpha$), то $PA\vdash S_u\rightarrow\neg Bew_T^n[\neg S_t]$ (из 4.2.4).

Определим понятие с т е п е н и з в е н а: первое звено имеет степень 0; если $uR_1^n t$ (где $n\leqslant\alpha$) и t - звено, непосредственно следующее за u, то звено t имеет степень n. Из определения цепи и 4.I.4 видно, что в цепи однозначно определена степень каждого звена.

4.2.9. Степень любого звена не превосходит степени непосредственно следующего за ним звена.

В самом деле. Допустим, в цепи t непосредственно следует за u, u имеет степень n, t - степень m (т.е. $uR_1^m t$), и $m<n$. u не может быть первым звеном, ибо степень первого звена $=0$. Допустим, k - звено, непосредственно предшествующее звену u. Так как u имеет степень n, $kR_1^n u$. Так как $uR_1^m t$ и $m=min(m,n)$, согласно 4.I.5, $kR_1^m t$. Поскольку t непосредственно следует в цепи за u, из определения цепи имеем $T_m\vdash\neg S_t$. Но тогда, поскольку $kR_1^n u$ и

$m<n$, из определения цепи и 4.I.4 следует, что u не может быть непосредственно следующим за k звеном. Мы получили противоречие.

4.2.I0. Если u - звено со степенью n и t - звено, находящееся в цепи правее u (при стандартной записи последовательности слева направо), то $uR_1^\ell t$ для некоторого $n\leqslant\ell\leqslant\alpha$.

Вышесказанное следует из 4.2.9 и 4.I.5.

4.2.II. Если $eR_1^k t$ (где $k\leqslant\alpha$), то в PA доказуема формула

(ж) $\{Z(\ulcorner e\urcorner)\,\&\,(\bigwedge\limits_{m:\,m\leqslant k}\ \bigwedge\limits_{k:\,eR_1^m k}\neg Bew_T^m[\neg S_k])\}\rightarrow\neg S_t$.

Чтобы убедиться в этом, докажем содержательно утверждение, которое арифметизируется формулой (ж). Допустим, $eR_1^k t$ (где $k\leqslant\alpha$), e является звеном цепи, и для всех $m\leqslant k$ неверно, что $\exists k\{eR_1^m k$ и $T_m\vdash\neg S_k\}$. Тогда, согласно определению цепи, или e является последним звеном, или очередным звеном является такой u, что $eR_1^n u$ для какого-то $k<n\leqslant\alpha$. В первом случае, поскольку $eR_1^k t$ и отношение R_1^k иррефлексивно, имеем $e\neq t$ и, тем самым, t не является последним звеном цепи. Во втором случае имеем $t\neq u$ - это следует из $eR_1^n u$, $eR_1^k t$ и $n\neq k$ согласно 4.I.4. Поэтому t может быть последним звеном цепи только в случае, если t находится правее u. Тогда, поскольку u имеет степень n, согласно 4.2.I0, для некоторого $n\leqslant\ell\leqslant\alpha$ $uR_1^\ell t$. Из этого и $eR_1^n u$ 4.I.5 дает $eR_1^k t$. Но это, согласно 4.I.4, невозможно, потому что $eR_1^\ell t$ и $k\neq n$.

Итак, из допущения истинности антецедента формулы (ж) (при условий $eR_1^k t$, $k\leqslant\alpha$) мы вывели истинность консеквента: t не является последним звеном цепи. Учитывая формализуемость в PA проведенных рассуждений, имеем $PA\vdash$(ж).

4.2.I2. Если $uR_1^n t$ (где $n\leqslant\alpha$), то в PA доказуема формула

$$(\divideontimes)\quad \underset{1}{(}Z(\ulcorner u\urcorner)\,\&\,\underset{2}{(}\exists z\,\underset{3}{(}Pf_T^n(z,[\neg S_t])\,\&\,\forall p<z\,\underset{4}{(}\bigwedge\limits_{k:\,uR_1^n k}\underset{5}{(}\neg Pf_T^n(p,[\neg S_k])\underset{5}{)}\underset{4}{)}\underset{3}{)}\,\&\,\underset{3}{(}\bigwedge\limits_{m:\,m<n}\underset{4}{(}\bigwedge\limits_{k:\,uR_1^m k}(\neg Bew_T^m[\neg S_k])\underset{4}{)}\underset{3}{)}\underset{2}{)}\underset{1}{)}\rightarrow Z(\ulcorner t\urcorner).$$

- утверждение, которое арифметизируется этой формулой, непосредственно следует из определения цепи.

4.2.I3. Если e является звеном цепи со степенью n, то $T_n\vdash Z(\ulcorner e\urcorner)$.

Докажем индукцией по числу звеньев, находящихся левее e.

Если e - самое левое, т.е. первое звено, то $e=w$ и имеет степень 0. Очевидно, что $T_0 \vdash Z(\ulcorner w \urcorner)$.

Пусть для звена u со степенью m известно, что $T_m \vdash Z(\ulcorner u \urcorner)$. Пусть e является непосредственно следующим за u звеном. Это возможно только если $uR_1^n e$ для какого-то $n \leq \alpha$. В таком случае e имеет степень n и, при этом, согласно 4.2.9, $m \leq n$. Из 4.2.12 имеем $T_n \vdash (\ast)$. Но в T_n доказуем антецедент формулы $(\ast)$. В самом деле, $T_n \vdash Z(\ulcorner u \urcorner)$ ввиду того, что $T_m \vdash Z(\ulcorner u \urcorner)$ (индуктивное предположение) и $m \leq n$. Предложение же, стоящее между скобками $(_2 \quad)_2$, является истинным Σ_{2n+1} -предложением (истинным ввиду того, что e в самом деле является непосредственно следующим за u звеном) и, согласно 1.6, тоже доказуемо в T_n. Следовательно, $T_n \vdash Z(\ulcorner e \urcorner)$.

4.2.14. При условии, что не $uR_2^n t$ (где $n \leq \alpha$), если u является последним звеном цепи, то $T_n \vdash \neg S_t$.

Доказательство. Допустим, не $uR_2^n t$ (где $n \leq \alpha$) и u является последним звеном цепи. Пусть e будет самым правым звеном среди тех, степень которых не превосходит n. Если $e \neq u$, то u находится правее e. Тогда, поскольку все звенья, находящиеся правее e, имеют степень $>n$, из 4.1.5 следует, что $eR_1^\ell u$ для какого-то $n < \ell \leq \alpha$ (в частности, ℓ - минимальная среди степеней звеньев, находящихся правее e). Итак,

4.2.14.1. $e=u$ или $eR_1^\ell u$ для некоторого $n < \ell \leq \alpha$.

Поскольку степень e не превосходит n, 4.2.13 дает:

4.2.14.2. $T_n \vdash Z(\ulcorner e \urcorner)$.

Теперь разбором случаев докажем, что $T_n \vdash \neg S_t$.

Случай 1. не eRt. Тут еще выделим два возможных подслучая: $e \neq t$ и $e=t$.

а) $e \neq t$. Из 4.2.7 и 4.2.14.2 следует, что в T_n доказуема формула $S_e \vee \bigvee_{k:\, eRk} S_k$. Так как t не встречается среди дизъюнктов этой формулы, из 4.2.6 следует, что $T_n \vdash \neg S_t$.

б) $e=t$. Допустим, $e=t=w$. Тогда не $uR_2^n w$ (поскольку, по условию, не $uR_2^n t$). Но, согласно 4.2.14.1, $e=u$ или $eR_1^\ell u$ для $n<\ell \leq \alpha$. В первом случае (когда $e=u$) из {не $uR_2^n t$} и $w=e=u$ получаем {не $wR_2^n w$}, что противоречит 4.1.9 (б); во втором случае (когда $eR_1^\ell u$, $n<\ell\leq\alpha$) из $w=e$ получаем $wR_1^\ell u$, отсюда, по 4.1.8, $wR_2^\ell u$, что вместе с $wR_2^n w$ ($wR_2^n w$ - в силу 4.1.9(б)), согласно 4.1.7, дает $uR_2^n w$, т.е. $uR_2^n t$. Это противоречит нашему условию о том, что не $uR_2^n t$. Итак, случай $e=t=w$ отпадает. Поэтому возьмем $e=t\neq w$. Тогда из определения цепи следует, что для некоторого $m \leq \alpha$ имеем $T_m \vdash \neg S_e$. При этом, поскольку степень e не превосходит n, $m \leq n$. Следовательно, $T_n \vdash \neg S_e$, т.е. (поскольку $e=t$) $T_n \vdash \neg S_t$.

Случай 2: $eR_1^k t$, где $n \leq k \leq \alpha$. Тогда, в силу 4.1.8, $eR_2^k t$ и, отсюда, в силу 4.1.6, $eR_2^n t$. Согласно 4.2.14.1, имеет место один из подслучаев:

а) $e=u$. Тогда $uR_2^n t$, что противоречит условию о том, что не $uR_2^n t$.

б) $eR_1^\ell u$, $n<\ell\leq\alpha$. Тогда, в силу 4.1.8, $eR_2^\ell u$. Это вместе с $eR_2^n t$, согласно 4.1.7, дает $uR_2^n t$ что опять противоречит условию {не $uR_2^n t$}.

Случай 3: $eR_1^k t$, где $k<n$. Согласно 4.2.11, $PA \vdash (\ast)$ и, тем самым, $T_n \vdash (\ast)$. Но в T_n доказуем антецедент формулы $(\ast)$. В самом деле, формула $\bigwedge_{m:\, m\leq k} \bigwedge_{k:\, eR_1^m k} \neg Bew_T^m[\neg S_k]$ является Σ_{2n+1} -предложением (в нестрогом смысле) и, при этом, истинным, ибо если бы оно было ложным, то, исходя из определения цепи, очередным после e звеном был бы какой-нибудь k со степенью $\leq k (<n)$, что противоречит тому, что e является самым правым звеном со степенью $\leq n$. Следовательно(см.1.6), $T_n \vdash \bigwedge_{m:\, m\leq k} \bigwedge_{k:\, eR_1^m k} \neg Bew_T^m[\neg S_k]$. Вместе с тем, согласно 4.2.14.2, $T_n \vdash Z(\ulcorner e \urcorner)$. Поэтому $T_n \vdash \neg S_t$.

Так как случаи 1-3 являются исчерпывающими, $T_n \vdash \neg S_t$. 4.2.14 доказано.

4.2.15. $PA \vdash S_u \to Bew_T^n[\bigvee_{t:\, uR_1^n t} S_t]$ (для всех $n \leq \alpha$).

Допустим, u является последним звеном цепи. Тогда, согласно 4.2.14, для любого такого t, что не $uR_2^n t$, $T_n \vdash \neg S_t$. Вместе с тем из 4.2.5 имеем $T_n \vdash \bigvee_{t:\, t\in W} S_t$. Следовательно, $T_n \vdash \bigvee_{t:\, uR_2^n t} S_t$. Формализация этого рассуждения в PA дает 4.2.15.

4.2.16. S_w истинно.

Согласно 4.2.5, $PA \vdash \bigvee_{u:\, u\in W} S_u$. Так как $PA \subseteq Th_\omega$, хотя бы одно из S_u $(u \in W)$ истинно. Но если $u \neq w$, то S_u не может быть истинным. В самом деле: согласно определению цепи, если $u \neq w$, то S_u может быть истинным, - т.е. u может быть последним звеном (да и вообще звеном) цепи, - только в случае, когда для какого-нибудь $n \leq \alpha$ $T_n \vdash \neg S_u$. Но ввиду того, что $T \subseteq Th_\omega$, такое невозможно (см.1.3). Заметим, что в отличие от 4.2.1-4.2.15, этот аргумент не может быть формализован в PA; но он формализуем в $PA_{\alpha+1}$ - это видно уже из того, что S_w - $\Sigma_{2(\alpha+1)+1}$ -формула.

Пусть φ будет такой реализацией, что для любой пропозициональной буквы p, содержащейся в формуле H, $\varphi(p) = \bigvee_{t:\, P(t,p)=T} S_t$.

4.2.17. Для любой подформулы A формулы H и любого $u \in W$, если $M_1 \models_u A$, то $PA \vdash S_u \to A_T^\varphi$ и если $M_1 \not\models_u A$, то $PA \vdash S_u \to \neg(A_T^\varphi)$.

Докажем индукцией по построению формулы A.

1. Для $\perp$ - тривиально.

2. а) $\mathcal{M}_1 \models_u p \Longleftrightarrow P(u,p) = \top$. Но в таком случае S_u является одним из дизъюнктов $\Phi(p)$ и, тем самым, $PA \vdash S_u \to p_T^\varphi$.

б) $\mathcal{M}_1 \not\models_u p \Longleftrightarrow P(u,p) \neq \top$. В таком случае S_u не является дизъюнктом $\Phi(p)$, из чего 4.2.6 дает $PA \vdash S_u \to \neg(p_T^\varphi)$.

3. а) $\mathcal{M}_1 \models_u (B \to C) \Longleftrightarrow \{\mathcal{M}_1 \not\models_u B$ или $\mathcal{M}_1 \models_u C\} \Rightarrow$ (согласно индуктивному предположению) $\{PA \vdash S_u \to \neg B_T^\varphi$ или $PA \vdash S_u \to C_T^\varphi\} \Rightarrow PA \vdash S_u \to (B \to C)_T^\varphi$.

б) $\mathcal{M}_1 \not\models_u (B \to C) \Longleftrightarrow \{\mathcal{M}_1 \models_u B$ и $\mathcal{M}_1 \not\models_u C\} \Longleftrightarrow \{PA \vdash S_u \to B_T^\varphi$ и $PA \vdash S_u \to \neg C_T^\varphi\} \Rightarrow PA \vdash S_u \to \neg((B \to C)_T^\varphi)$.

4. а) $\mathcal{M}_1 \models_u \boxed{n}B \Longleftrightarrow$ (согласно 4.I.2) $\mathcal{M}_2 \models \boxed{n}B \Leftrightarrow \forall t\{u R_2^n t \Rightarrow \mathcal{M}_2 \models_t B\} \Longleftrightarrow$ (согласно 4.I.2) $\forall t\{u R_2^n t \Rightarrow \mathcal{M}_1 \models_t B\} \Rightarrow$ (согласно индуктивному предположению) $\forall t\{u R_2^n t \Rightarrow PA \vdash S_t \to B_T^\varphi\} \Rightarrow PA \vdash (\bigvee_{t:uR_2^n t} S_t) \to B_T^\varphi \Rightarrow PA \vdash Bew_T^n[\bigvee_{t:uR_2^n t} S_t] \to Bew_T^n[B_T^\varphi]$. А так как, согласно 4.2.I5, $PA \vdash S_u \to Bew_T^n[\bigvee_{t:uR_2^n t} S_t]$, получаем $PA \vdash S_u \to Bew_T^n[B_T^\varphi]$ т.е. $PA \vdash S_u \to (\boxed{n}B)_T^\varphi$.

б) $\mathcal{M}_1 \not\models_u \boxed{n}B$ только тогда, когда для некоторого $t \in W$ имеем $u R_1^n t$ и: $\mathcal{M}_1 \not\models_t B$, т.е. (согласно индуктивному предположению) $PA \vdash S_t \to \neg B_T^\varphi$. Но в таком случае $PA \vdash Bew_T^n[B_T^\varphi] \to Bew_T^n[\neg S_t]$. А поскольку, согласно 4.2.8, $PA \vdash S_u \to \neg Bew_T^n[\neg S_t]$, имеем $PA \vdash S_u \to \neg Bew_T^n[B_T^\varphi]$, т.е. $PA \vdash \neg((\boxed{n}B)_T^\varphi)$.

Мы уже подошли к завершению доказательства леммы 4.2. Из 4.I.9(а) и 4.2.I7 следует, что $PA \vdash S_w \to \neg(H_T^\varphi)$. Так как $PA \subseteq Tr_\omega$, предложение $S_w \to \neg(H_T^\varphi)$ истинно; а поскольку, согласно 4.2.I6, S_w истинно, H_T^φ ложно, т.е. неверно, что $H \in L_T$. Лемма 4.2 доказана.

4.3. <u>Лэмма.</u> Если в области канонической модели $\mathcal{M}_{GP} = \langle W_{GP}, R_{GP}^0, R_{GP}^1, \ldots, P_{GP}\rangle$ системы GP существует такой мир w, что $\mathcal{M}_{GP} \not\models_w H$ и для всех подформул формулы H вида $\boxed{n}A$ имеем $\mathcal{M}_{GP} \models_w \boxed{n}A \to A$, то существует контрпара для H; в частности, такая контрпара $\{\mathcal{M}_1 = \langle W, R_1^0, R_1^1, \ldots, P\rangle, \mathcal{M}_2 = \langle W, R_2^0, R_2^1, \ldots, P\rangle\}$, что: $\overline{\overline{W}} \leq 2^q$, где q - число подформул H; для любого $n > \alpha =$ ММИ(H) R_1^n и R_2^n - - пустые отношения; для любого $u \in W$ и любой пропозициональной буквы p, не содержащейся в H, $P(u,p) = \bot$.

<u>Доказательство.</u> Назовем подформулы формулы H "интересными" формулами. Допустим, $w \in W_{GP}$, $\mathcal{M}_{GP} \not\models_w H$ и для всех интересных $\boxed{n}A$ $\mathcal{M}_{GP} \models_w \boxed{n}A \to A$.

Определим отношение эквивалентности $\sim$ на W_{GP}: для любых $u, t \in W_{GP}$ $u \sim t$ если и только если для любой интересной A $A \in u \Leftrightarrow A \in t$ (т.е. $\mathcal{M}_{GP} \models_u A \Leftrightarrow \mathcal{M}_{GP} \models_t A$). Для любого $u \in W_{GP}$ через $|u|$ обозначаем множество $\{t: u \sim t\}$.

4.3.I. Пусть $W = \{|u|: u \in W_{GP}\}$. Очевидно, что W конечно и, в частности, $\overline{\overline{W}} \leq 2^q$, где q - число всех интересных формул.

4.3.2. Пусть для любых $|u|, |t| \in W$ и любого $n \leq \alpha$ $|u| R_1^n |t|$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:

а) для любой интересной $\boxed{k}A$, где $k \leq n$, $\boxed{k}A \in u \Rightarrow \{\boxed{k}A \in t$ и $A \in t\}$;

б) для любой интересной $\boxed{k}A$, где $k < n$, $\boxed{k}A \in t \Rightarrow \boxed{k}A \in u$;

в) существует такая интересная $\boxed{n}A$, что $\boxed{n}A \in t$ и $\boxed{n}A \notin u$.

4.3.3. Пусть для любых $|u|, |t| \in W$ и любого $n \leq \alpha$ $|u| R_2^n |t|$ тогда и только тогда, когда выполняются условия 4.3.2(а) и 4.3.2(б).

Пусть для любого $n > \alpha$ R_1^n и R_2^n - пустые отношения. Пусть для любого $|u| \in W$ и любой пропозициональной буквы p $P(|u|, p) = P_{GP}(u,p)$, если p - интересная формула, и $= \bot$ - в противном случае. Пусть $\mathcal{M}_1 = \langle W, R_1^0, R_1^1, \ldots, P\rangle$ и $\mathcal{M}_2 = \langle W, R_2^0, R_2^1, \ldots, P\rangle$. Видно, что пара $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}$ удовлетворяет требованиям второй части леммы. Остается доказать, что $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}$ является контрпарой для H.

4.3.4. Для любого $n \leq \alpha$ $|w| R_2^n |w|$. Это следует из наших допущений относительно w и определения 4.3.3.

Следующие три утверждения также непосредственно следуют из определений 4.3.2 и 4.3.3:

4.3.5. Для любого $n \leq \alpha$ R_1^n иррефлексивно.

4.3.6. Для любых $|u|, |t| \in W$ и любого $n \leq \alpha$ $|u| R_1^n |t| \Rightarrow |u| R_2^n |t|$.

4.3.7. Для любых $|u|, |t| \in W$ и $m, n \leq \alpha$ $\{m \leq n$ и $|u| R_2^n |t|\} \Rightarrow |u| R_2^m |t|$.

4.3.8. Для любых $n_1, \ldots, n_i \leq \alpha$ и $|u_1|, \ldots, |u_{i+1}| \in W$, если $n = \min(n_1, \ldots, n_i)$, то $|u_1| R_1^{n_1} |u_2| R_1^{n_2} |u_3| R_1^{n_3} \ldots R_1^{n_i} |u_{i+1}| \Rightarrow |u_1| R_1^n |u_{i+1}|$.

Доказательство. Допустим, $|u_1| R_1^{n_1} |u_2| R_1^{n_2} |u_3| R_1^{n_3} \ldots R_1^{n_i} |u_{i+1}|$. Чтобы убедиться, что $|u_1| R_1^n |u_{i+1}|$, проверим, что все три пункта 4.3.2 выполняются для u_1 в качестве u и u_{i+1} в качестве t:

а) допустим, для некоторой интересной $\boxed{k}A$ $\boxed{k}A \in u_1$, где $k \leq n$. Тогда 4.3.2(а) дает, что $\boxed{k}A, A \in u_2$, $\boxed{k}A, A \in u_3, \ldots, \boxed{k}A, A \in u_{i+1}$.

б) допустим, для некоторой интересной $\boxed{k}A$ $\boxed{k}A \in u_{i+1}$, где $k < n$. Тогда 4.3.2(б) дает, что $\boxed{k}A \in u_i$, $\boxed{k}A \in u_{i-1}, \ldots, \boxed{k}A \in u_1$.

в) поскольку для одного из $1 \leq j \leq i$ имеем $n = n_j$ и $|u_j| R_1^n |u_{j+1}|$, по 4.3.2(в), для некоторой интересной $\boxed{n}A$ имеем $\boxed{n}A \in u_{j+1}$ и $\boxed{n}A \notin u_j$. Но, по 4.3.2(а), $\boxed{n}A \in u_{j+1} \Rightarrow \boxed{n}A \in u_{j+2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{n}A \in u_{i+1}$. Теперь, если допустим, что $\boxed{n}A \in u_1$, опять по 4.3.2(а) получим $\boxed{n}A \in u_j$, что противоречит факту $\boxed{n}A \notin u_j$. Итак, $\boxed{n}A \in u_{i+1}$ и $\boxed{n}A \notin u_1$.

4.3.9. Для любых $m, n \leq \alpha$ и $|u|, |t| \in W$, если $m \neq n$, то неверно, что одновременно $|u| R_1^n |t|$ и $|u| R_1^m |t|$.

В самом деле. Допустим, $n < m (\leq \alpha)$ и $|u| R_1^n |t|$. По 4.3.2(в), для некоторой интересной $\boxed{n}A$ $\boxed{n}A \in t$ и $\boxed{n}A \notin u$. Тогда $|u| R_1^m |t|$ не имеет места, потому что не выполняется 4.3.2(б).

4.3.IO. Для любых $m, n \leq \alpha$, где $m > n$, и любых $|u|, |t|, |k| \in W$, $\{|k| R_2^m |u|$ и $|k| R_2^n |t|\} \Rightarrow |u| R_2^n |t|$.

Пусть $|k| R_2^m |u|$ и $|k| R_2^n |t|$ $(n < m \leq \alpha)$. Докажем, что $|u| R_2^n |t|$, т.е., что выполняются условия 4.3.2(а) и (б).

а) допустим, для некоторой интересной $\boxed{k}A$ $\boxed{k}A\in u$, где $k\le n$. Поскольку $k<m$, в силу 4.3.2(б) имеем $\boxed{k}A\in h$. Отсюда, по 4.3.2(а), $\boxed{k}A\in t$ и $A\in t$.

б) допустим, для некоторой интересной $\boxed{k}A$ $\boxed{k}A\in t$, где $k<n$. Тогда, по 4.3.2(б), $\boxed{k}A\in h$. Отсюда по 4.3.2(а), имеем $\boxed{k}A\in u$.

4.3.11. Для любой интересной A и любого $u\in W_{GP}$ имеем $M_{GP}\models_u A \Leftrightarrow M_1\models_{|u|} A$.

Докажем индукцией по построению формулы A.

1. Для $\perp$ – тривиально.

2. $M_{GP}\models_u p \Leftrightarrow P_{GP}(u,p)=\top \Leftrightarrow P(|u|,p)=\top \Leftrightarrow M_1\models_{|u|} p$.

3. $M_{GP}\models_u (B\to C) \Leftrightarrow \{M_{GP}\not\models_u B$ или $M_{GP}\models_u C\} \Leftrightarrow$ (по индуктивному предположению) $\{M_1\not\models_{|u|} B$ или $M_1\models_{|u|} C\}\Leftrightarrow M_1\models_{|u|}(B\to C)$.

4. (I) Допустим, $M_{GP}\models_u \boxed{n}B$, т.е. $\boxed{n}B\in u$. Тогда, согласно 4.3.2(а), если $|u|R_1^n|t|$, то $B\in t$, т.е. $M_{GP}\models_t B$; отсюда, по индуктивному предположению, $M_1\models_{|t|} B$. Таким образом, для любого такого $|t|$, что $|u|R_1^n|t|$, имеем $M_1\models_{|t|} B$. Следовательно, $M_1\models_{|u|}\boxed{n}B$.

(II) Допустим, $M_{GP}\not\models_u \boxed{n}B$, т.е. $M_{GP}\models_u \langle n\rangle\neg B$. Поскольку $GP\vdash\langle n\rangle\neg B\to\langle n\rangle(\neg B\&\boxed{n}B)$, $M_{GP}\models_u\langle n\rangle(\neg B\&\boxed{n}B)$. Следовательно, для некоторого такого t, что $uR^n_{GP}t$, имеем $M_{GP}\not\models_t B$ и $M_{GP}\models_t\boxed{n}B$. Убедимся, что $|u|R_1^n|t|$. Поскольку $\boxed{n}B\notin u$ и $\boxed{n}B\in t$, условие 4.3.2(в) выполняется. Если для некоторой интересной $\boxed{k}C$, где $k\le n$, $\boxed{k}C\in u$, то, поскольку $GP\vdash\boxed{k}C\to\boxed{n}\boxed{k}C$ и $GP\vdash\boxed{k}C\to\boxed{n}C$, имеем $\boxed{n}\boxed{k}C\in u$ и $\boxed{n}C\in u$. Но тогда, поскольку $uR^n_{GP}t$, $\boxed{k}C\in t$ и $C\in t$. Значит, выполняется условие 4.3.2(а). Допустим, для некоторой интересной $\boxed{k}C$, где $k<n$, $\boxed{k}C\in t$. Поскольку $uR^n_{GP}t$, имеем $\langle n\rangle\boxed{k}C\in u$. А поскольку $GP\vdash\langle n\rangle\boxed{k}C\to\boxed{k}C$, имеем $\boxed{k}C\in u$. Значит, условие 4.3.2(б) тоже выполняется и, таким образом, $|u|R_1^n|t|$. Из $M_{GP}\not\models_t B$ по индуктивному предположению следует $M_1\not\models_{|t|}B$. Поэтому $M_1\not\models_{|u|}\boxed{n}B$.

4.3.12. Для любой интересной A и любого $u\in W_{GP}$ $M_{GP}\models_u A\Leftrightarrow M_2\models_{|u|}A$.

Доказательство повторяет доказательство 4.3.11, если там M_1 и R_1 соответственно заменить на M_2 и R_2. При этом, пункт 4.(II) можно упростить, так как проверка выполнения условия 4.3.2(в) становится излишней.

Поскольку $M_{GP}\not\models_w H$, согласно 4.3.11, $M_1\not\models_{|w|}H$. Из 4.3.11 и 4.3.12 также следует, что для любой интересной A и любого $|u|\in W$ $M_1\models_{|u|}A\Leftrightarrow M_2\models_{|u|}A$. Это вместе с 4.3.1, 4.3.4 – 4.3.10 дает, что $\{M_1,M_2\}$ является контрпарой для H. Лемма 4.3 доказана.

4.4. Лемма. Если $GP\not\vdash\boxed{d+1}H$ (где d =ММИ(H)), то существует такой $w\in W_{GP}$, что $M_{GP}\not\models_w H$ и для всех подформул формулы H вида $\boxed{n}A$ $M_{GP}\models_w\boxed{n}A\to A$.

Доказательство. Допустим, $GP\not\vdash\boxed{d+1}H$. Это означает, что существует такой $h\in W_{GP}$, что $M_{GP}\not\models_h\boxed{d+1}H$. Следовательно, существует такой $w\in W_{GP}$, что $hR^{d+1}_{GP}w$ и $M_{GP}\not\models_w H$. Убедимся, что для любой интересной $\boxed{n}A$ $M_{GP}\models_w\boxed{n}A\to A$.

Допустим, $\boxed{n}A$ интересная формула (поэтому $n\le d$) и $M_{GP}\models_w\boxed{n}A$. Так как $hR^{d+1}_{GP}w$, имеем $M_{GP}\models_h\langle d+1\rangle\boxed{n}A$. А поскольку $GP\vdash\langle d+1\rangle\boxed{n}A\to\boxed{n}A$, имеем $M_{GP}\models_h\boxed{n}A$ и, следовательно, $M_{GP}\models_w A$. Итак, $M_{GP}\models_w\boxed{n}A\Rightarrow M_{GP}\models_w A$, т.е. $M_{GP}\models_w\boxed{n}A\to A$, что и требовалось доказать.

4.5. Теорема. Если $T\subseteq Th_\omega$, то $H\in L_T\Leftrightarrow GP\vdash\boxed{d+1}H$, где d=ММИ(H).

Доказательство. Положим $T\subseteq Th_\omega$. Если $GP\vdash\boxed{d+1}H$, то $GP^*\vdash H$ и, согласно 2.9, $H\in L_T$. Обращение этого утверждения непосредственно следует из лемм 4.4, 4.3 (первой части) и 4.2.

4.6. Теорема. Если $T\subseteq Th_\omega$, то $GP^*\supseteq L_T$.

Это является непосредственным следствием теоремы 4.5.

4.7. Теорема. Если $T\subseteq Th_\omega$, то $GP\supseteq L_T(T)$ и, тем самым, $GP\supseteq L_T(PA)$.

Доказательство. Нетрудно увидеть, что если $H\in L_T(T)$, то $\boxed{0}H\in L_T$. Тогда, согласно 4.5, если $T\subseteq Th_\omega$, то $GP\vdash\boxed{d+1}\boxed{0}H$, где d = ММИ($\boxed{0}H$) (=ММИ(H)). Отсюда $H\in GP$, т.е. $GP\vdash H$ следует согласно лемме 4.8, которую мы сейчас собираемся доказать:

4.8. Лемма. Для любого k и любой полимодальной формулы H, если $GP\vdash\boxed{k}\boxed{0}H$, то $GP\vdash H$.

Доказательство. Определим модель $M=\langle W,R^0,R^1,\dots,P\rangle$ следующим образом:

$W=W_{GP}\cup\{h\}$, где $h\notin W_{GP}$.

Для любой пропозициональной буквы p и любого $u\in W$ $P(u,p)=\top\Leftrightarrow\{u\in W_{GP}$ и $P_{GP}(u,p)=\top\}$.

Для любого n и любых $u,t\in W$ uR^nt тогда и только тогда, когда $t\in W_{GP}$ и выполняется одно из следующих условий:

(а) $u\in W_{GP}$ и $uR^n_{GP}t$;

(б) $u=h$ и $n=0$;

(в) $u=h$, $n>0$ и для любых $m<n$ и $v\in W_{GP}$ $hR^mv\Rightarrow tR^m_{GP}v$.

Заметим, что если $u\in W_{GP}$, то $uR^nt\Leftrightarrow uR^n_{GP}t$ (для всех n и t), а также $M\models_u A\Leftrightarrow M_{GP}\models_u A$ (для всех A).

4.8.1. Для любых $u,t\in W_{GP}$ и любого n, если hR^nu и $uR^n_{GP}t$, то hR^nt.

Доказательство. Допустим, hR^nu и $uR^n_{GP}t$. Покажем, что hR^nt. Если $n=0$, то это очевидно. Положим $n>0$. Достаточно показать, что для любого $m<n$ и любого $v\in W_{GP}$ $\{$не $tR^m_{GP}v\}\Rightarrow\{$не $hR^mv\}$. Для этого допустим, что не $tR^m_{GP}v$, где $m<n$ и $v\in W_{GP}$. Это оз-

начает, что для некоторой формулы A $\boxed{m}A\in t$ и $A\notin v$. Поскольку $uR^{n}_{GP}t$, имеем $\langle n\rangle\boxed{m}A\in u$. А поскольку $GP\vdash\langle n\rangle\boxed{m}A\to\boxed{m}A$, $\boxed{m}A\in u$. Поэтому не $uR^{m}_{GP}v$. Из этого и определения R^{n}, поскольку $\mathfrak{k}R^{n}u$, следует не $\mathfrak{k}R^{m}v$ – что и требовалось доказать.

4.8.2. $M\models_{\mathfrak{k}}\boxed{n}(\boxed{n}A\to A)\to\boxed{n}A$ (для всех n и A).

Доказательство. Допустим, $M\not\models_{\mathfrak{k}}\boxed{n}A$. Тогда существует такой $u\in W_{GP}$, что $\mathfrak{k}R^{n}u$ и $M\not\models_{u}A$, т.е. $M_{GP}\not\models_{u}A$. Тут возможны два случая:

I) $M_{GP}\models_{u}\boxed{n}A$. Тогда $M,M_{GP}\not\models_{u}\boxed{n}A\to A$ и, следовательно, $M\not\models_{\mathfrak{k}}\boxed{n}(\boxed{n}A\to A)$.

2) $M_{GP}\not\models_{u}\boxed{n}A$, т.е. $M_{GP}\models_{u}\langle n\rangle\neg A$. Тогда, поскольку $GP\vdash\langle n\rangle\neg A\to\langle n\rangle(\neg A\,\&\,\boxed{n}A)$, $M_{GP}\models_{u}\langle n\rangle(\neg A\,\&\,\boxed{n}A)$, т.е. для некоторого такого t, что $uR^{n}_{GP}t$, имеем $M,M_{GP}\not\models_{t}\boxed{n}A\to A$. Но, согласно 4.8.I, $\mathfrak{k}R^{n}t$, поэтому $M\not\models_{\mathfrak{k}}\boxed{n}(\boxed{n}A\to A)$.

Итак, в любом случае $M\not\models_{\mathfrak{k}}\boxed{n}A$ влечет $M\not\models_{\mathfrak{k}}\boxed{n}(\boxed{n}A\to A)$. Следовательно, $M\models_{\mathfrak{k}}\boxed{n}(\boxed{n}A\to A)\to\boxed{n}A$, что и требовалось доказать.

4.8.3. $M\models_{\mathfrak{k}}\boxed{n}A\to\boxed{n+1}A$ (для всех n и A).

Достаточно убедиться, что для всех u $\{$не $\mathfrak{k}R^{n}u\}\Rightarrow\{$не $\mathfrak{k}R^{n+1}u\}$. Допустим, не $\mathfrak{k}R^{n}u$. Это значит, что для некоторых $m<n$ и $t\in W_{GP}$ имеем $\mathfrak{k}R^{m}t$ и не $uR^{m}_{GP}t$. Но так как $m<(n+1)$, соотношение $\mathfrak{k}R^{n+1}u$ не имеет места.

4.8.4. $M\models_{\mathfrak{k}}\langle n\rangle A\to\boxed{n+1}\langle n\rangle A$ (для всех n и A).

Это непосредственно следует из определения отношения R^{n}.

Очевидно, что все остальные аксиомы GP (в частности, тавтологии и формулы, задающиеся схемой 2.I(I)) тоже истинны в модели M относительно мира $\mathfrak{k}$. Модус понено сохраняет истинность; видно также, что если $GP\vdash A$, то $M\models_{\mathfrak{k}}\boxed{0}A$, потому что из $\mathfrak{k}$ по R^{0} достижимы только миры канонической модели системы GP. Из всего этого следует, что

4.8.5. $GP\vdash A\Rightarrow M\models_{\mathfrak{k}}A$ (для всех A).

Поэтому максимальное множество полимодальных формул $\mathfrak{k}'=\{A\colon M\models_{\mathfrak{k}}A\}$ является GP-непротиворечивым. Следовательно, $\mathfrak{k}'\in W_{GP}$. Итак,

4.8.6. $M\models_{\mathfrak{k}}A\Leftrightarrow M,M_{GP}\models_{\mathfrak{k}'}A$ (для всех A).

4.8.7. Для любого $u\in W_{GP}$ и любого n $\mathfrak{k}R^{n}u\Rightarrow\mathfrak{k}'R^{n}_{GP}u$.

Доказательство. Допустим, не $\mathfrak{k}'R^{n}_{GP}u$. Это означает, что для некоторой A $\boxed{n}A\in\mathfrak{k}'$ и $A\notin u$. Но поскольку $\boxed{n}A\in\mathfrak{k}'$, т.е. $M_{GP}\models_{\mathfrak{k}'}\boxed{n}A$, согласно 4.8.6, имеем $M\models_{\mathfrak{k}}\boxed{n}A$; следовательно, не $\mathfrak{k}R^{n}u$.

4.8.8. Из 4.8.7 и определения отношения R^{n} следует, что для любого n $\mathfrak{k}R^{n}\mathfrak{k}'$.

Теперь допустим $GP\vdash\boxed{k}\boxed{0}H$. Тогда, в силу 4.8.5, $M\models_{\mathfrak{k}}\boxed{k}\boxed{0}H$. Так как, согласно 4.8.8, $\mathfrak{k}R^{\kappa}\mathfrak{k}'$, имеем $M\models_{\mathfrak{k}'}\boxed{0}H$ и, отсюда, в силу 4.8.6, $M\models_{\mathfrak{k}}\boxed{0}H$. А так как для любого $u\in W_{GP}$ $\mathfrak{k}R^{0}u$, получаем: для всех $u\in W_{GP}$ $M\models_{u}H$, т.е. для всех $u\in W_{GP}$ $M_{GP}\models_{u}H$. Последнее, поскольку M_{GP} – каноническая модель системы GP, означает, что $GP\vdash H$. Лемма 4.8 доказана.

§ 5. Разрешимость GP и GP^{*}

5.I. <u>Теорема.</u> Системы GP и GP^{*} разрешимы.

<u>Доказательство.</u> Нетрудно заметить, что для любой полимодальной формулы H и любой теории T $H\in L_{T}(T)\Leftrightarrow\boxed{0}H\in L_{T}$.

Из этого факта и теорем 2.8, 2.9, 4.6 и 4.7, взяв $T\subseteq T\mathfrak{k}_{\omega}$, следует, что $GP\vdash H\Leftrightarrow GP^{*}\vdash\boxed{0}H$. Поэтому нам достаточно показать разрешимость системы GP^{*}, из чего автоматически будет следовать разрешимость GP.

5.I.I. <u>Лемма.</u> Для любой полимодальной формулы H $GP^{*}\vdash H$ тогда и только тогда, когда для H не существует такой контрпары $\{M_{1}=\langle W,R^{0}_{1},R^{1}_{1},\ldots,P\rangle,\ M_{2}=\langle W,R^{0}_{2},R^{1}_{2},\ldots,P\rangle\}$, что: $\overline{\overline{W}}\leqslant 2^{q}$, где q – число подформул H; для любого $n>\alpha=$ ММИ(H) отношения R^{n}_{1} и R^{n}_{2} – пустые; для любого $u\in W$ и любой пропозициональной буквы p, не содержащейся в H, $P(u,p)=\bot$.

<u>Доказательство.</u> Допустим, $GP^{*}\vdash H$. Тогда, в силу 2.9, $H\in L_{PA}$. Но, согласно 4.2, это возможно только тогда, когда не существует контрпары для H. Теперь допустим, наоборот: $GP^{*}\nvdash H$. Очевидно, что тогда $GP\nvdash\boxed{\alpha+1}H$, где $\alpha=$ ММИ(H). Из этого 4.4 и 4.3 дают, что существует контрпара для H с отмеченными свойствами.

Разрешающая процедура для доказуемости формулы H в GP^{*} такова: берем все такие пары моделей $\{\langle W,R^{0}_{1},R^{1}_{1},\ldots,P\rangle,\ \langle W,R^{0}_{2},R^{1}_{2},\ldots,P\rangle\}$, где $\overline{\overline{W}}\leqslant 2^{q}$ (q – число подформул формулы H), для любого $n>\alpha=$ = ММИ(H) отношения R^{n}_{1} и R^{n}_{2} – пустые, и где P – такая оценивающая функция, что для любой пропозициональной буквы p, не содержащейся в H, и для любого $u\in W$ $P(u,p)=\bot$. Очевидно, что число всех таких возможных пар конечно, и оно однозначно зависит от q, α и числа пропозициональных букв, содержащихся в H. Затем проверяем каждую пару, является ли она контрпарой для H по определению 4.I. Поскольку число пар, подлежащих проверке, а также области составляющих моделей этих пар конечны, процедура проверки целиком тоже конечна. Согласно лемме 5.I.I, $GP^{*}\vdash H$ если и только если в результате этой проверки не будет обнаружено контрпары для H.

Из описания разрешающей процедуры видно, что предикаты $GP\vdash\ldots$ и

$GP^*\vdash$... не только разрешимы (общерекурсивны), но и примитивно-рекурсивны.

§ 6. Полнота GP еще в одном смысле

Теорию, получающуюся добавлением к PA конечного числа арифметических формул в качестве дополнительных аксиом, называем к о н е ч н ы м р а с ш и р е н и е м арифметики.

4.I. <u>Теорема</u>. Для любой полимодальной формулы H, если $GP\nvdash H$, то существуют такое конечное расширение T арифметики и такая реализация φ, что H^{φ}_{T} ложно.

<u>Доказательство</u>. Для каждого конечного расширения T арифметики пусть U_T обозначает конъюнкцию универсальных замыканий всех дополнительных аксиом T, не являющихся аксиомами PA. Так как пустую конъюнкцию отождествляем с $\bar{0}=\bar{0}$, $U_{PA}=(\bar{0}=\bar{0})$.

Для каждого такого T определим операцию ${}^{T}A^{\varphi}$ следующим образом (p – любая пропозициональная буква, B и C – любые полимодальные формулы, n – любое натуральное число):

${}^{T}p^{\varphi}=\varphi(p)$; ${}^{T}\bot^{\varphi}=(\bar{0}=\bar{1})$; ${}^{T}(B\to C)^{\varphi}={}^{T}B^{\varphi}\to{}^{T}C^{\varphi}$; ${}^{T}(\boxed{n}B)^{\varphi}=Bew^{n}_{PA}[U_T\to{}^{T}B^{\varphi}]$.

6.I.I. <u>Лемма</u>. Для любой полимодальной формулы A и любой реализации φ $PA\vdash{}^{T}A^{\varphi}\to A^{\varphi}_{T}$.

<u>Доказательство</u>. Сперва индукцией по n убедимся, что для любой арифметической формулы F $T_n\vdash F\Leftrightarrow PA_n\vdash U_T\to F$. Можем предположить, что T с самого начала задана как теория, получающаяся добавлением к PA замкнутой формулы U_T в качестве единственной дополнительной аксиомы. Из теоремы о дедукции знаем, что $T_0\vdash F\Leftrightarrow$ $PA_0\vdash U_T\to F$. В качестве индуктивного предположения возьмем, что для любой формулы E $T_n\vdash E\Leftrightarrow PA_n\vdash U_T\to E$. Убедимся, что в таком случае $T_{n+1}\vdash F\Leftrightarrow PA_{n+1}\vdash U_T\to F$. Ясно, что если $PA_{n+1}\vdash U_T\to F$, то $T_{n+1}\vdash U_T\to F$ и, по модус поненс (поскольку U_T является аксиомой T_{n+1}), $T_{n+1}\vdash F$. Остается доказать, что $T_{n+1}\vdash F\Rightarrow PA_{n+1}\vdash U_T\to F$. Допустим, $T_{n+1}\vdash F$. Как и в доказательстве I.7, можем предположить, что замкнутая формула $\forall x P(x)$ – единственная такая формула в T_{n+1}-выводе формулы F, которая является аксиомой T_{n+1}, но не является аксиомой T_n. Тогда из $T_{n+1}\vdash F$, согласно теореме о дедукции, имеем $T_n\vdash\forall xP(x)\to F$ и отсюда, по индуктивному предположению,

$$(*)\qquad PA_n\vdash U_T\to(\forall x P(x)\to F).$$

Так как $\forall xP(x)$ является аксиомой T_{n+1}, не будучи вместе с тем аксиомой T_n, имеем: $T_n\vdash P(\bar{0})$, $T_n\vdash P(\bar{1})$, ... (см. определения I.2 и I.I). Отсюда, по индуктивному предположению, $PA_n\vdash U_T\to P(\bar{0})$, $PA_n\vdash U_T\to P(\bar{1})$, ... Но в таком случае, поскольку U_T замкнута, формула $\forall x(U_T\to P(x))$ является аксиомой PA_{n+1} и (опять ввиду замкнутости U_T) $PA_{n+1}\vdash U_T\to\forall xP(x)$. Это вместе с (*) дает $PA_{n+1}\vdash U_T\to F$.

Итак, $T_n\vdash F\Leftrightarrow PA_n\vdash U_T\to F$. Ввиду того, что доказательство этого факта (для каждого конкретного n) можно формализовать в PA, имеем:

6.I.I.I. $PA\vdash Bew^{n}_{T}[F]\leftrightarrow Bew^{n}_{PA}[U_T\to F]$ (для всех F).

Очевидно также следующее:

6.I.I.2. Если $PA\vdash F\leftrightarrow E$, то $PA\vdash Bew^{n}_{PA}[U_T\to F]\leftrightarrow Bew^{n}_{PA}[U_T\to E]$ (для всех F и E).

Опираясь на эти факты, докажем 6.I.I индукцией по построению полимодальной формулы A. Единственный нетривиальный случай – когда $A=\boxed{n}B$. Согласно 6.I.I.I, $PA\vdash Bew^{n}_{T}[B^{\varphi}_{T}]\leftrightarrow Bew^{n}_{PA}[U_T\to B^{\varphi}_{T}]$. А согласно 6.I.I.2 и индуктивному предположению, $PA\vdash Bew^{n}_{PA}[U_T\to B^{\varphi}_{T}]\leftrightarrow$ $Bew^{n}_{PA}[U_T\to{}^{T}B^{\varphi}]$. Следовательно, $PA\vdash Bew^{n}_{T}[B^{\varphi}_{T}]\leftrightarrow Bew^{n}_{PA}[U_T\to{}^{T}B^{\varphi}]$, т.е. $PA\vdash(\boxed{n}B)^{\varphi}_{T}\leftrightarrow{}^{T}(\boxed{n}B)^{\varphi}$. Лемма 6.I.I доказана.

Модальная формула называется модализованной по пропозициональной букве q, если в ней все вхождения q (если они имеются) находятся в области действия какого-нибудь модального оператора.

6.I.2. <u>Лемма.</u> Если формула A модализована по q и $GP\vdash\neg q\to A$, то $GP\vdash A$.

<u>Доказательство.</u> Допустим, A модализована по q и $GP\nvdash A$. Тогда для некоторого $w\in W_{GP}$ $\mathcal{M}_{GP}\not\models_{w} A$. Определим модель $\mathcal{M}=\langle W,R^0,R^1,\dots,P\rangle$ следующим образом:

$W=W_{GP}\cup\{h\}$, где $h\notin W_{GP}$.

$P(h,q)=\bot$; для любой $p\neq q$ $P(h,p)=P_{GP}(w,p)$; для всех $u\in W_{GP}$ и p $P(u,p)=P_{GP}(u,p)$.

Для любых $u,t\in W$ и любого n $uR^{n}t$ тогда и только тогда, когда $t\in W_{GP}$ и выполняется одно из условий:

(a) $u\in W_{GP}$ и $uR^{n}_{GP}t$;

(б) $u=h$ и $wR^{n}_{GP}t$.

Заметим, что если $u\in W_{GP}$, то для любой формулы B $\mathcal{M}\models_{u}B\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}_{GP}\models_{u}B$.

6.I.2.I. Для любой модализованной по q формулы B $\mathcal{M}\models_{h}B\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}_{GP}\models_{w}B$.

Доказательство индукцией по построению B. Случай $B=\bot$ тривиален. Если B – пропозициональная буква, то $B\neq q$. Тогда из определения оценивающей функции P видно, что $\mathcal{M}\models_{h}B\Leftrightarrow\mathcal{M}_{GP}\models_{w}B$. Если $B=C\to D$, то, поскольку B модализована по q, C и D также модализованы по q. Тогда, по индуктивному предположению, $\mathcal{M}\models_{h}C\Leftrightarrow\mathcal{M}_{GP}\models_{w}C$ и $\mathcal{M}\models_{h}D\Leftrightarrow\mathcal{M}_{GP}\models_{w}D$. Отсюда следует, что $\mathcal{M}\models_{h}B\Leftrightarrow\mathcal{M}_{GP}\models_{w}B$. Если же $B=\boxed{n}C$, то $\mathcal{M}\models_{h}B\Leftrightarrow\forall t\{hR^{n}t\Rightarrow\mathcal{M}\models_{t}C\}\Leftrightarrow\forall t\{hR^{n}t\Rightarrow\mathcal{M}_{GP}\models_{t}C\}\Leftrightarrow$ (поскольку $\{t: hR^{n}t\}=\{t: wR^{n}_{GP}t\}$) $\forall t\{wR^{n}_{GP}t\Rightarrow\mathcal{M}_{GP}\models_{t}C\}\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}_{GP}\models_{w}\boxed{n}C$, т.е. $\mathcal{M}_{GP}\models_{w}B$.

6.I.I.2. Для любой формулы B, если $GP\vdash B$, то $\mathcal{M}\models_{h}B$.

Доказательство индукцией по длине вывода формулы B. Если B - аксиома, задающаяся одной из схем 2.I(I) - 2.I(IУ), то B модализована по r и, поскольку $M_{GP} \models_{w} B$, согласно 6.I.2.I, имеем $M \models_{k} B$. Если $B = \boxdot C$ и $GP \vdash C$, то, поскольку из k по R° достижимы только миры канонической модели системы GP, $M \models_{k} B$. Случаи, когда B - тавтология или выводится из других формул по модус поненс, тривиальны.

Теперь, поскольку A модализована по r и $M_{GP} \not\models_{w} A$, согласно 6.I.2.I, $M \not\models_{k} A$. Следовательно, так как $P(k, r) = \bot$, $M \not\models_{k} \neg r \to A$. Поэтому, согласно 6.I.2.2, $GP \nvdash \neg r \to A$. Лемма 6.I.2 доказана.

Для пропозициональной буквы r определим операцию A^{r} следующим образом (p - любая пропозициональная буква, B и C - любые формулы, n - любое натуральное число):

$$p^{r} = p; \quad \bot^{r} = \bot; \quad (B \to C)^{r} = B^{r} \to C^{r}; \quad (\boxed{n} B)^{r} = \boxed{n}(r \to B^{r}).$$

Заметим, что в A^{r} все подформулы формы $\boxed{n} B$ имеют вид $\boxed{n}(r \to \mathcal{D})$; если A не содержит r (и вообще, если A модализована по r), то A^{r} модализована по r.

6.I.3. <u>Лемма</u>. Пусть A не содержит r. Тогда $GP \nvdash A^{r} \Rightarrow GP^{*} \nvdash A^{r}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть K - конъюнкция всех таких формул вида $\boxed{n} B \to B$, где $\boxed{n} B$ - подформула формулы A^{r}.

6.I.3,I. Если $GP \nvdash K \to A^{r}$, то $GP^{*} \nvdash A^{r}$.

В самом деле. Допустим, $GP \nvdash K \to A^{r}$. Тогда существует такой $w \in W_{GP}$, что $M_{GP} \not\models_{w} K \to A^{r}$, т.е. $M_{GP} \models_{w} K$ и $M_{GP} \not\models_{w} A^{r}$. $M_{GP} \models_{w} K$ означает, что $M_{GP} \models_{w} \boxed{n} B \to B$ для каждой подформулы вида $\boxed{n} B$ формулы A^{r}. В таком случае, согласно 4.3, существует контрпара для A^{r}, из чего по 4.2 следует, что $A^{r} \notin L_{PA}$. Тогда, согласно 2.9, $GP^{*} \nvdash A^{r}$.

6.I.3.2. Если $GP \nvdash \neg r \to A^{r}$, то $GP^{*} \nvdash A^{r}$.

В самом деле: поскольку все подформулы формулы A^{r} формы $\boxed{n} B$ имеют вид $\boxed{n}(r \to \mathcal{D})$, все конъюнкты K имеют вид $\boxed{n}(r \to \mathcal{D}) \to (r \to \mathcal{D})$. Но $\neg r$ имплицирует $\boxed{n}(r \to \mathcal{D}) \to (r \to \mathcal{D})$ по ИВ. Следовательно, $GP \vdash \neg r \to K$. Поэтому если $GP \nvdash \neg r \to A^{r}$, то $GP \nvdash K \to A^{r}$. Тогда, в силу 6.I.3.I, $GP^{*} \nvdash A^{r}$.

Теперь, раз A не содержит r, формула A^{r} модализована по r. Поэтому, согласно 6.I.2, если $GP \nvdash A^{r}$, то $GP \nvdash \neg r \to A^{r}$ и, следовательно (согласно 6.I.3.2), $GP^{*} \nvdash A^{r}$. Лемма 6.I.3 доказана.

6.I.4. <u>Лемма</u>. Если $\varphi(r) = U_{T}$, то ${}^{T}A^{\varphi} = (A^{r})^{\varphi}_{PA}$.

<u>Доказательство</u> индукцией по построению A. ${}^{T}p^{\varphi} = \varphi(p) = p^{\varphi}_{PA} = (p^{r})^{\varphi}_{PA}$; ${}^{T}\bot^{\varphi}$ $(\bar{0} = \bar{1}) = \bot^{\varphi}_{PA} = (\bot^{r})^{\varphi}_{PA}$. Допустим, уже установлено, что ${}^{T}B^{\varphi} = (B^{r})^{\varphi}_{PA}$ и ${}^{T}C^{\varphi} = (C^{r})^{\varphi}_{PA}$. Тогда ${}^{T}(B \to C)^{\varphi} = {}^{T}B^{\varphi} \to {}^{T}C^{\varphi} = (B^{r})^{\varphi}_{PA} \to (C^{r})^{\varphi}_{PA} = (B^{r} \to C^{r})^{\varphi}_{PA} = ((B \to C)^{r})^{\varphi}_{PA}$; ${}^{T}(\boxed{n} B)^{\varphi} = Bew^{n}_{PA}[U_{T} \to {}^{T}B^{\varphi}] = Bew^{n}_{PA}[U_{T} \to (B^{\varphi})^{\varphi}_{PA}] = Bew^{n}_{PA}[\varphi(r) \to (B^{r})^{\varphi}_{PA}] = Bew^{n}_{PA}[r^{\varphi}_{PA} \to (B^{r})^{\varphi}_{PA}] = Bew^{n}_{PA}[(r \to B^{r})^{\varphi}_{PA}] = (\boxed{n}(r \to B^{r}))^{\varphi}_{PA} = ((\boxed{n} B)^{r})^{\varphi}_{PA}$.

6.I.5. <u>Лемма</u>. Если A не содержит r и $GP \nvdash A$, то $GP \nvdash A^{r}$.

<u>Доказательство</u>. Допустим, A не содержит r и $GP \nvdash A$. Последнее, согласно 4.7, влечет, что для некоторой реализации φ $PA \nvdash A^{\varphi}_{PA}$. Отсюда, в силу 6.I.I, $PA \nvdash {}^{PA}A^{\varphi}$. Пусть ψ - такая реализация, что $\psi(r) = U_{PA}$ $(= (\bar{0} = \bar{0}))$ и для любой $p \neq r$ $\psi(p) = \varphi(p)$. Так как A не содержит r, ${}^{PA}A^{\varphi} = {}^{PA}A^{\psi}$. Следовательно, $PA \nvdash {}^{PA}A^{\psi}$. А поскольку, согласно 6.I.4, ${}^{PA}A^{\psi} = (A^{r})^{\psi}_{PA}$, имеем $PA \nvdash (A^{r})^{\psi}_{PA}$. Отсюда, в силу 2.8, $GP \nvdash A^{r}$.

6.I.6. <u>Лемма</u>. Если $GP^{*} \nvdash A^{r}$, то найдется такое конечное расширение T арифметики и такая реализация φ, что A^{φ}_{T} ложно.

<u>Доказательство</u>. Допустим, $GP^{*} \nvdash A^{r}$. Тогда, согласно 4.6, существует такая реализация φ, что $(A^{r})^{\varphi}_{PA}$ ложно. Пусть T - расширение PA с помощью формулы $\varphi(r)$ в качестве дополнительной аксиомы. Тогда $U_{T} = \varphi(r)$ и, в силу 6.I.4, $(A^{r})^{\varphi}_{PA} = {}^{T}A^{\varphi}$. Следовательно, ${}^{T}A^{\varphi}$ ложно. Отсюда в силу 6.I.I, следует, что A^{φ}_{T} ложно.

Теперь допустим, что $GP \nvdash H$. Пусть r - буква, не содержащаяся в H. Тогда, согласно 6.I.5, $GP \nvdash H^{r}$. Отсюда, по 6.I.3, $GP^{*} \nvdash H^{r}$, из чего 6.I.6 дает, что существует такое конечное расширение T арифметики и такая реализация φ, что H^{φ}_{T} ложно. Теорема 6.I доказана.

Ниже, под "множеством всех рассматриваемых нами теорий" понимаем множество всех теорий, удовлетворяющих общим требованиям, предъявленным к теории T в начале § I. Очевидно, что в это множество строго включено множество конечных расширений арифметики.

Теорема 2.8 установила, что для всех рассматриваемых нами теорий T $GP \subseteq L_{T}$. Объединив этот результат с 6.I, получаем:

6.2. <u>Теорема</u>. Пусть Θ - множество всех конечных расширений арифметики или множество всех рассматриваемых нами теорий. Тогда $GP = \bigcap_{T \in \Theta} L_{T}$.

Из этой теоремы (см. также I.8) легко выводятся следующие

<u>Следствия</u>:

6.3. Пусть Θ - множество всех конечных непротиворечивых расширений арифметики или множество всех рассматриваемых нами непротиворечивых теорий. Тогда $\{A: GP \vdash \neg \boxdot \bot \to A\} = \bigcap_{T \in \Theta} L_{T}$.

6.4. Пусть Θ - множество всех конечных ω-непротиворечивых расширений арифметики или множество всех рассматриваемых нами ω-непротиворечивых теорий. Тогда $\{A: GP \vdash \neg \boxed{\omega} \bot \to A\} = \bigcap_{T \in \Theta} L_{T}$.

6.5. Пусть Θ - множество всех конечных ω-противоречивых расширений арифметики или множество всех рассматриваемых нами ω-противоречивых теорий. Тогда $\{A: GP \vdash \boxed{\omega} \bot \to A\} = \bigcap_{T \in \Theta} L_{T}$.

6.6. Если T - противоречивое расширение арифметики, то $\{A: GP \vdash \boxdot \bot \to A\} = L_{T}$.

§ 7. Приложения к мономодальным системам

Формулу языка GP, в которой нет отличных от $\boxdot$ модальных операторов, называем м о н о м о д а л ь н о й. Мономодальным называем и язык, в котором допускаются только мономодальные формулы, а также системы в таком языке.

В мономодальном языке выделим две системы: GL и $G1$.

С и с т е м а GL.

Аксиомы GL : – тавтологии (в мономодальном языке);

– мономодальные формулы, задающиеся схемами:

I. $\boxdot(A\to B)\to(\boxdot A\to\boxdot B)$

II. $\boxdot(\boxdot A\to A)\to\boxdot A$

Правила вывода GL : $A, A\to B\vdash B$ и $A\vdash\boxdot A$.

GL является нормальной непротиворечивой системой ([6] , гл.I). Согласно обозначениям, принятым в § 3, каноническую модель этой системы обозначаем через $M_{GL}=\langle W_{GL}, R^{\circ}_{GL}, P_{GL}\rangle$.

С и с т е м а $G1$.

Аксиомы $G1$: – теоремы GL;

– $\neg\boxdot\bot$;

– мономодальные формулы, задающиеся схемой

$\boxdot(\boxdot A\vee\boxdot B)\to(\boxdot A\vee\boxdot B)$.

Правило вывода $G1$: $A, A\to B\vdash B$.

Так как $G1$ содержит тавтологии и модус понено, класс теорем этой системы замкнут относительно следования по ИВ.

Определим $L^{\circ}_{T}(S)$ как подмножество всех мономодальных формул множества $L_T(S)$. Вместо $L^{\circ}_{T}(T\ell_{\omega})$ будем писать L°_{T}.

Р.Соловей [II] доказал, что $GL=L^{\circ}_{PA}(PA)$. Из этого и теоремы 2.8 следует, что для любой мономодальной формулы H $GP\vdash H\Rightarrow GL\vdash H$. Справедливость обращения этого утверждения очевидна. Итак,

7.I. <u>Лемма</u>. Для любой мономодальной формулы H $GL\vdash H\Leftrightarrow GP\vdash H$.

Используя эту лемму, получаем:

7.2. Теорема 6.2 и ее следствия 6.3 и 6.6 останутся справедливыми, если там GP и L соответственно заменить на GL и L°.

7.3. <u>Лемма</u>. Для любой мономодальной формулы H $G1\vdash H\Leftrightarrow GP\vdash\neg\boxed{1}\bot\to H$.

<u>Доказательство</u>. Так как единственное правило вывода системы $G1$ – модус понено является также правилом вывода GP , для доказательства утверждения $G1\vdash H\Rightarrow GP\vdash\neg\boxed{1}\bot\to H$ достаточно убедиться, что если A – аксиома системы $G1$, то $GP\vdash\neg\boxed{1}\bot\to A$. В случае, когда A – теорема GL или формула $\neg\boxdot\bot$, это очевидно. Ниже мы даем

сокращенную схему доказательства формулы $\neg\boxed{1}\bot\to A$ в GP , когда A имеет вид $\boxdot(\boxdot C\vee\boxdot\mathcal{D})\to(\boxdot C\vee\boxdot\mathcal{D})$:

I. $GP\vdash\Diamond\neg C\to\boxed{1}\Diamond\neg C$ (схема 2.I(IУ)).

2. $GP\vdash\Diamond\neg\mathcal{D}\to\boxed{1}\Diamond\neg\mathcal{D}$ (схема 2.I(IУ)).

3. $GP\vdash(\Diamond\neg C\,\&\,\Diamond\neg\mathcal{D})\to\boxed{1}(\Diamond\neg C\,\&\,\Diamond\neg\mathcal{D})$ (из (I), (2) и нормальности GP).

4. $GP\vdash\boxdot(\boxdot C\vee\boxdot\mathcal{D})\to\boxed{1}(\boxdot C\vee\boxdot\mathcal{D})$ (схема 2.I(III)).

5. $GP\vdash\{\boxdot(\boxdot C\vee\boxdot\mathcal{D})\,\&\,(\Diamond\neg C\,\&\,\Diamond\neg\mathcal{D})\}\to\boxed{1}\bot$ (из (3), (4) и нормальности GP).

6. $GP\vdash\neg\boxed{1}\bot\to\{\boxdot(\boxdot C\vee\boxdot\mathcal{D})\to(\boxdot C\vee\boxdot\mathcal{D})$ (из (5) по ИВ).

Таким образом, мы доказали, что:

7.3.I. $G1\vdash H\Rightarrow GP\vdash\neg\boxed{1}\bot\to H$ (для любой мономодальной формулы H)

Теперь, до конца оставшейся части доказательства леммы, положим, что для мономодальной формулы H имеем $G1\nvdash H$. Лемма будет доказана, если при таком допущении получим $GP\nvdash\neg\boxed{1}\bot\to H$.

7.3.2. Для любых мономодальных формул $B_1,\dots,B_k$, где $k\geqslant 0$, $G1\vdash(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k)\to\Diamond(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k)$.

Докажем индукцией по k. Поскольку $G1\vdash\Diamond\top$, справедливость базисного утверждения (когда $k = 0$) очевидна. Индукционный шаг:

I. $G1\vdash(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k)\to\Diamond(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k)$ (индуктивное предположение).

2. $G1\vdash(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_{k+1})\to(\Diamond(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k)\,\&\,\Diamond B_{k+1})$ (из (I) по ИВ).

3. $G1\vdash\{\Diamond(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k)\,\&\,\Diamond B_{k+1}\}\to\Diamond\{\Diamond(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k)\,\&\,\Diamond B_{k+1}\}$ (контрапозиция аксиомы системы $G1$).

4. $G1\vdash\Diamond\{\Diamond(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k)\,\&\,\Diamond B_{k+1}\}\to\Diamond(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_{k+1})$ (теорема GL).

5. $G1\vdash(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_{k+1})\to\Diamond(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_{k+1})$ (из (2), (3) и (4) по ИВ).

7.3.3. Для любых мономодальных формул $B_1,\dots,B_k$, $C_1,\dots,C_\ell$ $G1\vdash(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k\,\&\,\boxdot C_1\,\&\dots\&\,\boxdot C_\ell)\to\Diamond(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k\,\&\,\boxdot C_1\,\&\dots\&\,\boxdot C_\ell\,\&\,C_1\,\&\dots\&\,C_\ell)$.

Доказательство.

I. $G1\vdash(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k)\to\Diamond(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k)$ (согласно 7.3.2).

2. $G1\vdash\{\Diamond(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k)\,\&\,(\boxdot C_1\,\&\dots\&\,\boxdot C_\ell)\}\to\Diamond(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k\,\&\,\boxdot C_1\,\&\dots\&\,\boxdot C_\ell\,\&\,C_1\,\&\dots\&\,C_\ell)$ (теорема GL).

3. $G1\vdash(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k\,\&\,\boxdot C_1\,\&\dots\&\,\boxdot C_\ell)\to\Diamond(\Diamond B_1\,\&\dots\&\,\Diamond B_k\,\&\,\boxdot C_1\,\&\dots\&\,\boxdot C_\ell\,\&\,C_1\,\&\dots\&\,C_\ell)$ (из (I) и (2) по ИВ).

7.3.4. Множество $G1\cup\{\neg H\}$ GL – непротиворечиво.

В самом деле, допустим, это множество GL – противоречиво. Тогда существуют такие формулы $B_1,\dots,B_k\in G1$, что $GL\vdash\neg(B_1\,\&\dots\&\,B_k\,\&\,\neg H)$, т.е. $GL\vdash(B_1\,\&\dots\&\,B_k)\to H$. Но в таком случае, поскольку $B_1,\dots,B_k$ являются теоремами $G1$, имеем $G1\vdash H$, что противоречит нашему допущению о том, что $GI \nvdash H$.

7.3.5. Существует такой $w \in W_{GL}$, что $M_{GL} \not\models_w H$ и для любой craмономодальной формулы A, если $GI \vdash A$, то $M_{GL} \models_w A$.

В самом деле, так как все (и только) максимальные GL-непротиворечивые множества мономодальных формул являются элементами W_{GL}, 7.3.5 следует из 7.3.4 и леммы Линденбаума (см. [6], с.91), согласно которой любое GL-непротиворечивое множество формул можно дополнить до максимального GL-непротиворечивого множества.

На протяжении всей оставшейся части доказательства леммы зафиксируем w как тот мир из W_{GL}, о котором говорится в 7.3.5.

7.3.6. Множество $\{\langle 0 \rangle B: \langle 0 \rangle B \in w\} \cup \{\boxed{0}C: \boxed{0}C \in w\} \cup \{C: \boxed{0}C \in w\}$ GL-непротиворечиво.

Доказательство. Допустим противное: множество, о котором говорится выше, GL-противоречиво. Это значит, что $GL \vdash \neg U$, где U – конъюнкция некоторых формул $\langle 0 \rangle B_1, \ldots, \langle 0 \rangle B_k, \boxed{0}C_1, \ldots, \boxed{0}C_\ell, C_1, \ldots, C_\ell$ из этого множества. Тогда, по правилу усиления, $GL \vdash \neg \langle 0 \rangle U$. Следовательно, $\neg \langle 0 \rangle U \in w$, т.е. $\langle 0 \rangle U \notin w$. Вместе с тем, в силу 7.3.3 и 7.3.5, формула $(\langle 0 \rangle B_1 \& \ldots \& \langle 0 \rangle B_k \& \boxed{0}C_1 \& \ldots \& \boxed{0}C_\ell) \to \langle 0 \rangle U$ принадлежит w и, поскольку все конъюнкты антецедента этой формулы $\in w$, $\langle 0 \rangle U \in w$. Мы получили противоречие.

7.3.7. Существует такой $v \in W_{GL}$, что $wR^0_{GL}v$ и для любого $u \in W_{GL}$ $wR^0_{GL}u \Leftrightarrow vR^0_{GL}u$.

В самом деле, пусть v – максимальное GL-непротиворечивое множество мономодальных формул, включающее множество $\{\langle 0 \rangle B: \langle 0 \rangle B \in w\} \cup \{\boxed{0}C: \boxed{0}C \in w\} \cup \{C: \boxed{0}C \in w\}$. Согласно 7.3.6 и лемме Линденбаума, такое v существует и, следовательно, $v \in W_{GL}$. Так как $\boxed{0}C \in w \Rightarrow C \in v$, имеем $wR^0_{GL}v$, и так как v содержит в точности те формулы вида $\langle 0 \rangle B$ и $\boxed{0}C$, которые содержит w, из v достижимы (по R^0_{GL}) в точности те миры, которые достижимы из w.

Зафиксируем v как тот мир из W_{GL}, о котором говорится в 7.3.7.

Определим модель $M = \langle W, R^0, R^1, \ldots, P \rangle$ следующим образом:

$W = W_{GL} \cup \{\mathfrak{R}\}$, где $\mathfrak{R} \notin W_{GL}$.

Для любой пропозициональной буквы p:

а) $P(\mathfrak{R}, p) = P_{GL}(w, p)$;

б) если $u \in W_{GL}$, то $P(u, p) = P_{GL}(u, p)$.

Для любого n и любых $u, t \in W$ $uR^n t$ тогда и только тогда, когда $t \in W_{GL}$ и выполняется одно из следующих условий:

(а) $n=0$, $u \in W_{GL}$ и $uR^0_{GL}t$;

(б) $n=0$, $u=\mathfrak{R}$ и $wR^0_{GL}t$;

(в) $n=1$, $u=\mathfrak{R}$ и $t=v$.

Легко убедиться в справедливости следующих трех предложений:

7.3.8. Для любой мономодальной формулы A и любого $u \in W_{GL}$ $M \models_u A \Leftrightarrow M_{GL} \models_u A$.

7.3.9. Для любой мономодальной формулы A $M \models_{\mathfrak{R}} A \Leftrightarrow M_{GL} \models_w A$.

7.3.10. Для любого $u \in W_{GL}$ и любой полимодальной формулы вида $\boxed{n}A$, где $n \geq 1$, $M \models_u \boxed{n}A$.

Определим операцию, превращающую полимодальные формулы A в мономодальные $\bar{A}$ (p – любая пропозициональная буква, B и C – любые полимодальные формулы):

$\bar{p} = p$; $\bar{\bot} = \bot$; $\overline{(B \to C)} = \bar{B} \to \bar{C}$; $\overline{(\boxed{0}B)} = \boxed{0}\bar{B}$; для всех $n \geq 1$ $\overline{(\boxed{n}B)} = \top$.

7.3.11. Для любого $u \in W_{GL}$ и любой полимодальной формулы A $M \models_u A \Leftrightarrow M \models_u \bar{A}$.

Доказательство индукцией по построению A. Единственный нетривиальный случай – когда $A = \boxed{0}B$. Тогда $M \models_u \boxed{0}B \Leftrightarrow \forall t\{uR^0 t \Rightarrow M \models_t B\} \Leftrightarrow$ (по индуктивному предположению) $\forall t\{uR^0 t \Rightarrow M \models_t \bar{B}\} \Leftrightarrow M \models_u \boxed{0}\bar{B} \Leftrightarrow M \models_u \overline{\boxed{0}B}$.

7.3.12. Для любого $u \in W_{GL}$ и любой полимодальной формулы A $GP \vdash A \Rightarrow M \models_u A$.

Доказательство индукцией по длине вывода A в GP. При проверке аксиом единственный нетривиальный случай – когда $A = \boxed{0}(\boxed{0}B \to B) \to \boxed{0}B$. Тогда, поскольку $\bar{A} = \boxed{0}(\boxed{0}\bar{B} \to \bar{B}) \to \boxed{0}\bar{B}$ – мономодальная формула, доказуемая в GL, $M_{GL} \models_u A$. Отсюда, по 7.3.8, $M \models_u \bar{A}$, из чего по 7.3.11 следует, что $M \models_u A$. Модус поненс сохраняет истинность; при проверке правила усиления используем тот факт, что $\{t: uR^0 t\} \subseteq W_{GL}$.

7.3.13. Для любой полимодальной формулы A $GP \vdash A \Rightarrow M \models_{\mathfrak{R}} A$.

Доказательство индукцией по длине вывода формулы A в GP. Проверим только случаи, когда $A = \boxed{0}(\boxed{0}B \to B) \to \boxed{0}B$, $A = \langle 0 \rangle B \to \boxed{1}\langle 0 \rangle B$ или когда $A = \boxed{0}B$ выводится из B по правилу усиления. Остальные случаи проще или тривиальны. 1) поскольку $GP \vdash \boxed{0}(\boxed{0}B \to B) \to \boxed{0}B$, согласно 7.3.12, $M \models_w \boxed{0}(\boxed{0}B \to B) \to \boxed{0}B$. А так как $\{u: \mathfrak{R}R^0 u\} = \{u: wR^0 u\}$, имеем $M \models_{\mathfrak{R}} \boxed{0}(\boxed{0}B \to B) \to \boxed{0}B$. 2) поскольку для любого u $\mathfrak{R}R^0 u \Leftrightarrow wR^0 u$ и $wR^0 u \Leftrightarrow wR^0_{GL}u \Leftrightarrow$ (см. 7.3.7) $vR^0_{GL}u \Leftrightarrow vR^0 u$, $\mathfrak{R}R^0 u \Rightarrow vR^0 u$. Следовательно, $M \models_{\mathfrak{R}} \langle 0 \rangle B \to \boxed{1}\langle 0 \rangle B$. 3) если $GP \vdash B$, то, согласно 7.3.12, для любого $u \in W_{GL}$ имеем $M \models_u B$. Следовательно, $M \models_{\mathfrak{R}} \boxed{0}B$.

Мы подошли к завершению доказательства леммы 7.3. При допущении $GI \nvdash H$ (из которого были выведены предложения 7.3.2 – 7.3.13) нам нужно было доказать, что $GP \nvdash \neg\boxed{1}\bot \to H$. Но в самом деле: если допустим, что $GP \vdash \neg\boxed{1}\bot \to H$, то, согласно 7.3.13, $M \models_{\mathfrak{R}} \neg\boxed{1}\bot \to H$ и, так как $M \models_{\mathfrak{R}} \neg\boxed{1}\bot$, имеем $M \models_{\mathfrak{R}} H$. Тогда, поскольку H – мономодальная формула, по 7.3.9 получаем $M_{GL} \models_w H$, что противоречит предложению 7.3.5 (ведь w мы зафиксировали как тот мир w, о котором говорится в 7.3.5). Следовательно, $GP \nvdash \neg\boxed{1}\bot \to H$. Лемма

7.3 доказана.

7.4. <u>Лемма</u>. Для любой мономодальной формулы H $GL \vdash H \Leftrightarrow$ $GP \vdash \boxed{\omega}\bot \rightarrow H$.

Доказательство этой леммы значительно проще доказательства леммы 7.3 и мы его пропускаем.

7.5. <u>Теорема</u>. Пусть $\mathcal{B}$ – множество всех конечных ω-непротиворечивых расширений арифметики или множество всех рассматриваемых нами ω-непротиворечивых теорий. Тогда $GI = \bigcap_{T\in\mathcal{B}} L_T^0$.

Эта теорема непосредственно следует из 6.4 и леммы 7.3.

7.6. <u>Теорема</u>. Пусть $\mathcal{B}$ – множество всех конечных ω-противоречивых расширений арифметики или множество всех рассматриваемых нами теорий. Тогда $GL = \bigcap_{T\in\mathcal{B}} L_T^0$.

Эта теорема следует из предложения 6.5, леммы 7.4, теоремы 6.2 (или же 2.8) и леммы 7.I.

Пусть $T+E$ означает теорию, получающуюся добавлением к теории T формулы E в качестве дополнительной аксиомы. Справедливы следующие

<u>утверждения:</u>

7.7. Если $T \subseteq Th_\omega$, то $GI = L_T(T + \neg Bew_T^1[\bar{0}=\bar{1}])$.

Доказательство: теорема о дедукции для системы T, лемма 7.3, теоремы 2.8 и 4.7.

7.8. Если $T \subseteq Th_\omega$, то $GL = L_T(T + Bew_T^1[\bar{0}=\bar{1}])$.

Доказательство: теорема о дедукции для системы T, лемма 7.4, теоремы 2.8 и 4.7.

Напомним, что формула $Bew_T^1[\bar{0}=\bar{1}]$ арифметизирует ω-противоречивость теории T (см.I.8).

§ 8. Дальнейшие результаты

С.Н.Артемовым [I, 3] и Ф.Монтанья [8] было доказано усиление теоремы Соловья о полноте GL: существует такая реализация φ, что для любой мономодальной формулы H, если $GL \nvdash H$, то $PA \nvdash H_{PA}^{\varphi}$. Следующее утверждение устанавливает, что этот результат нельзя обобщить на полимодальные формулы, взяв GP вместо GL:

8.I. <u>Утверждение.</u> Для любой реализации φ найдется такая полимодальная формула H, что $GP \nvdash H$ и $PA \vdash H_{PA}^{\varphi}$.

Доказательство. Пусть n – такое число, что $\varphi(p)$ является Π_{2n}-формулой (ведь любая формула является Π_{2n}-формулой для какого-то n). Тогда $\varphi(p)$ и $\neg\varphi(p)$ являются Σ_{2n+1}-формулами и, согласно I.5, $PA \vdash \varphi(p) \rightarrow Bew_{PA}^n[\varphi(p)]$ и $PA \vdash \neg\varphi(p) \rightarrow Bew_{PA}^n[\neg\varphi(p)]$. Отсюда, поскольку $PA \vdash \varphi(p) \vee \neg\varphi(p)$, имеем $PA \vdash Bew_{PA}^n[\varphi(p)] \vee$

$Bew_{PA}^n[\neg\varphi(p)]$, т.е. $PA \vdash (\boxed{n}p \vee \boxed{n}\neg p)_{PA}^{\varphi}$. Теперь убедимся, что $GP \nvdash \boxed{n}p \vee \boxed{n}\neg p$. Допустим, $GP \vdash \boxed{n}p \vee \boxed{n}\neg p$. Тогда, поскольку GP замкнута относительно подстановки вместо пропозициональных букв, $GP \vdash \boxed{n}\boxed{n}\bot \vee \boxed{n}\neg\boxed{n}\bot$. Отсюда, поскольку $GP \vdash \boxed{n}\neg\boxed{n}\bot \rightarrow \boxed{n}\bot$ (схема 2.I(II), в качестве A берется $\bot$), имеем $GP \vdash \boxed{n}\boxed{n}\bot \vee \boxed{n}\bot$. Из этого по 2.8 следует очевидно ложное утверждение $(\boxed{n}\boxed{n}\bot \vee \boxed{n}\bot) \in L_{PA}(PA)$.

Основным результатом § 4 было установление того факта, что при условии $T \subseteq Th_\omega$ для любой полимодальной формулы H $H \in L_T \Rightarrow GP \vdash \boxed{\alpha+1}H$, где $\alpha = ММИ(H)$ (теорема 4.5). Следующее утверждение, которое мы приводим без доказательства, устанавливает, что для каждой конкретной формулы H условие $T \subseteq Th_\omega$ можно ослабить:

8.2. <u>Утверждение</u>. Пусть для данной полимодальной формулы H $\alpha = ММИ(H)$. Тогда, если теория $T_{\alpha+1}$ непротиворечива(т.е. если теория T_α ω-непротиворечива – см.I.7), то $H \in L_T \Rightarrow$ $GP \vdash \boxed{\alpha+1}H$.

Пусть A^k (где A – полимодальная формула и k – натуральное число) – формула, получающаяся из A одновременной заменой всех операторов вида $\boxed{n}$ на $\boxed{n+k}$. Например, $(\boxed{2}\boxed{0}p \rightarrow \boxed{1}\bot)^2 = \boxed{4}\boxed{2}p \rightarrow \boxed{3}\bot$.

8.3. <u>Теорема</u>. Для любой полимодальной формулы H и любого натурального числа n имеем а) $GP \vdash H \Leftrightarrow GP \vdash H^n$ и б) $GP^* \vdash H \Leftrightarrow GP^* \vdash H^n$.

Эта теорема, которую мы приводим без доказательства, пожалуй, может представлять интерес скорее своими возможными следствиями, нежели сама по себе. Отметим одно из них:

<u>Следствие.</u> Если $T \subseteq Th_\omega$, то для любой полимодальной формулы H и любого натурального числа n $H^n \in L_T(T_n) \Leftrightarrow H^n \in L_T(PA)$.

<u>Доказательство</u>. $H^n \in L_T(T_n) \Leftrightarrow \boxed{n}(H^n) \in L_T \Leftrightarrow GP^* \vdash \boxed{n}(H^n) \Leftrightarrow$ $GP^* \vdash (\boxed{0}H)^n \Leftrightarrow GP^* \vdash \boxed{0}H \Leftrightarrow \boxed{0}H \in L_{PA} \Leftrightarrow H \in L_{PA}(PA) \Leftrightarrow GP \vdash H \Leftrightarrow$ $GP \vdash H^n \Leftrightarrow H^n \in L_T(PA)$.

В заключение следует отметить, что все основные результаты настоящей работы останутся справедливыми и при более слабых требованиях к рассматриваемым теориям, чем требования, предъявленные к теории T в § I. Мы тут воздерживаемся от точной формулировки этих ослабленных требований. Заметим лишь, что в их число не входит рекурсивная перечислимость: в качестве $T=T_0$ можно брать и такие неперечислимые теории, как, например, $\omega(PA)$, $\omega(\omega(PA))$, ...

Литература

I. Артемов С.Н. Арифметически полные модальные теории. - Семиотика и информатика. М.: ВИНИТИ, 1979-1980, вып.14, с.115-133.

2. Джапаридзе Г.К. n-доказуемость и отображение ее свойств в модальной логике с бесконечным числом модальных операторов. - Интенсиональные логики и логическая структура теорий. Тезисы докладов IУ советско-финского коллоквиума по логике. Мецниереба, 1985, с.56-57.

3. Artemov S.N. Extensions of arithmetics and connected with them modal theories. - VI Intern.Congress for Logic, Method. Phil. Sci., Hannover, 1979, Abstracts, Sections 1-4, p.15-19.

4. Boolos G. ω-consistency and the diamond. - Stud.Log., 1980, 39, 237-243.

5. Boolos G. On notions of provability in provability logic. - VIII Intern.Congress of Logic, Method. Phil. Sci., Moscow, 1987, Abstracts, vol.5, part 3, p.236-238.

6. Boolos G. The unprovability of consistency; an essay in modal logic. Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

7. Japaridze G.K. Generalized provability principles and modal logic. - VIII Intern.Congress of Logic, Method. Phil. Sci., Moscow, 1987, Abstracts, vol.5, part 1, p.32-34.

8. Montagna F. On diagonalizable algebra of Peano arithmetic. - Boll.Un.Math.Ital.,1979, vol.66-B, p.795-812.

9. Segerberg K. An essay in classical modal logic. - Philosofiska Studier, Uppsala, 1971.

10. Segerberg K. Modal logics with linear alternative relations. - Theoria, 1970, vol.36, N3, p.301-322.

11. Solovay R.M. Provability interpretations of modal logic. - Israel J.Math., 1976, 25, 287-304.